PROBABILIDADES
GUIA No 5

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

1. Distribución Binomial

Definición: Una **prueba de Bernoully** es un experimento que tiene dos resultados posibles, a los cuales se les llama éxito (favorable) y fracaso (no favorable). Normalmente se usa la notación P(éxito) = p y P(fracaso) = q = 1-p.

Definición: Sea X el número total de éxitos en **n** pruebas independientes y repetidas de Bernoully con probabilidad de éxito igual a p. X se llama **variable aleatoria binomial** con parámetros n y p.

Teorema: Si X es una variable aleatoria binomial con parámetros n y p, entonces la probabilidad de k éxitos está dada por P(X=k) = B(k,n,p) = $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. B(k,n,p) se conoce como **Distribución Binomial** . Se debe tener en cuenta que la probabilidad de fracaso total es q^n y la probabilidad de obtener al menos un éxito es $1 - q^n$.

Ejercicios Propuestos

1) Explicar el significado de la expresión dada y calcule su valor :
   a) B(1, 5, 1/3) b) B(2, 7, 1/2) c) B(2, 4, 1/4)

2) ¿Qué valor debe tomar n, k y p en cada caso, para que sea válida la igualdad:
   a) B(k, 8, 1/2) = 7/32. b) B(2, n, 1/2) = 5/16. c) B(1, 2, p) = 8/27.

3) Se lanza una moneda equilibrada 10 veces, y consideremos CARA como un resultado favorable y SELLO como un resultado desfavorable.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que sucedan tres caras exactamente?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de conseguir por lo menos 7 caras?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que no salgan caras?
   d) Obtenga la tabla y la gráfica de distribución.

4) Un dado equilibrado se lanza 7 veces, y consideremos un resultado exitoso la aparición de un múltiplo de 3.
   a) Hallar la probabilidad de que salga un múltiplo de 3 exactamente 4 veces.
   b) Hallar la probabilidad de que no salga un múltiplo de 3.
   c) Hallar la probabilidad de que un múltiplo de 3 salga por lo menos 4 veces.
   d) Obtenga la tabla y la gráfica de distribución.

5) Un lote de artículos recientemente manufacturados se sacan 8 artículos. (bueno es éxito – defectuoso es fracaso). P(éxito) = p = 1/2.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar tres artículos defectuosos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que más de la mitad de los artículos sacados sean defectuosos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar a lo mínimo dos artículos no defectuosos?
d) ¿Cuál es la probabilidad de sacar a lo máximo cuatro artículos no defectuosos?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los artículos sacados sean buenos?

6) El equipo A juega ocho partidos y tiene 2/3 de probabilidad de ganar cuando juega.
   a) Hallar la probabilidad de que gane cuatro partidos.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que gane por lo menos dos partido?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de ganar más de la mitad de los partidos?

7) 15 vehículos, entre los cuales se encuentran 3 camperos, se parquean todos los días de la semana, alrededor de una plaza.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que los camperos queden juntos sólo dos días de la semana?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que los camperos nunca queden juntos?

8) La probabilidad de que un jugador de baloncesto anote un tiro libre es de 3/4, y sus tiros son independientes. Supóngase que puede hacer 5 tiros libres en un juego.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que los acierte todos?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que los falle todos?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que anote por lo menos 3 tiros?

9) Un hombre está jugando tiro al blanco y dispara siete veces. La probabilidad de que un hombre pegue en el blanco es 1/4.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que pegue por lo menos dos veces al blanco?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más aciertos que desaciertos?
   c) ¿Cuántas veces tiene que disparar para que la probabilidad de dar al blanco por lo menos una vez sea mayor que 2/3?

10) Una selección de béisbol juega 8 partidos de eliminatoria para un campeonato mundial y la probabilidad de ganar cuando juega es del 40%.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane exactamente cuatro partidos?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que gane por lo menos cuatro partidos?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane máximo cuatro partidos?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que al final tenga más partidos ganados que perdidos?

11) Hay 10 niños matriculados en el kínder de una escuela, de los cuales 4 tienen 4 años, 3 tienen 5 años y 3 tienen 6 años. De este curso se selecciona diariamente una pareja de niños al azar para desarrollar cierta actividad. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana se seleccione 3 veces una pareja cuyo promedio de edad sea mayor o igual de 5 años?

12) De una baraja corriente de 52 cartas se saca y se sustituye tres veces una carta.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que resulten dos corazones?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que resulten tres corazones?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que resulte por lo menos un corazón?

13) En un juego se lanzan 6 dados normales 8 veces. En el juego se gana si salen 3 dobles diferentes o dos triples diferentes.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de no ganar en este juego?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar 2 veces?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de ganar más de 4 veces?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de ganar todas las veces?

14) Una caja contiene cinco bolas rojas y ocho bolas blancas. Se sacan cuatro bolas simultáneamente y se devuelven a la caja. Si esta acción se realiza ocho veces,

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar cuatro bolas rojas en cuatro ocasiones?
b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas rojas y dos bolas blancas en dos ocasiones?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en todas las ocasiones salgan dos bolas rojas y dos bolas blancas?

15) La proporción de impurezas X de determinadas muestras de mineral de cobre es una variable aleatoria que tiene una función de densidad de probabilidad definida como $f(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0\leq x\leq 1\\ 0, & \text{en los demás valores}\end{cases}$.

Si se seleccionan cuatro muestras de ellas en forma independiente,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una de ellas tenga una proporción de impurezas mayor que 0.4?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una de ellas tenga una proporción de impurezas mayor que 0.5?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que más de la mitad de las muestras tengan una proporción de impurezas menor que 0.6?

16) Un estudiante presenta un examen de selección múltiple que contiene 8 preguntas cada una con 3 respuestas opcionales. Supóngase que está adivinando al responder a cada pregunta y que la probabilidad de responder correctamente cada una de ellas es de 1/3.

a) Obtener la tabla de probabilidades.
b) Obtenga la tabla de distribución acumulada.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que responda incorrectamente todas las preguntas?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte más de la mitad de las preguntas?

17) En un juego, una persona recibe una mano de 5 cartas de una baraja normal de 52 cartas. Si el juego se realiza 5 veces, ¿cuál es la probabilidad de que la persona reciba 2 figuras y 3 números diferentes en 3 de los 5 juegos?

18) Un laberinto para ratas tiene un corredor recto, y al final una bifurcación; en la bifurcación, la rata debe ir a la derecha o a la izquierda. Suponer que se colocan 10 ratas en el laberinto, de una en una. Si cada una de las ratas toma al azar una de las dos alternativas del camino, ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 9 vayan al mismo lado?

19) El número de horas de vida útil de una batería XYZ, tiene asociada una función de densidad de probabilidad de la forma $f(x)=\begin{cases}ke^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$.

Una empresa compran 10 baterías de esta marca. (Tomar x en unidades de 100 horas)

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la mitad de las baterías tenga una vida útil menor de 200 o mayor de 400 horas?
b) Calcular la probabilidad de que al menos 3 baterías de este tipo duren más de 300 horas, dado que ya han estado en uso más de 200 horas.

20) La probabilidad de que un paciente se recupere de cierta enfermedad del sistema digestivo es del 40% y se tiene que 15 personas han contraído dicha enfermedad.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 10 personas sobrevivan?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sobreviven entre 3 y 8 personas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan exactamente 5 personas?

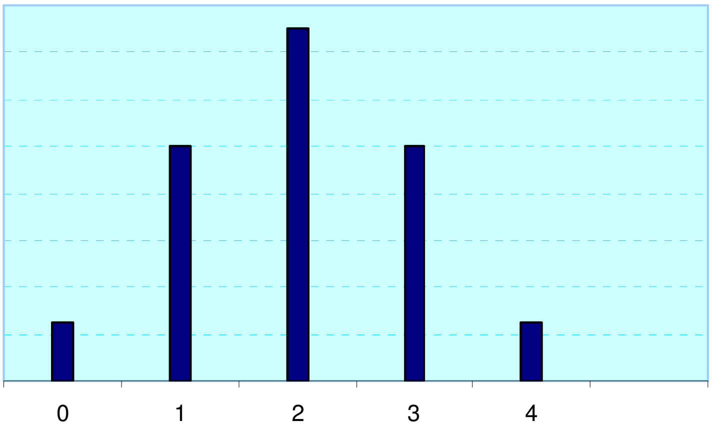
21) Sea X una variable aleatoria con distribución binomial ***B(k,n,p).*** Demuestre que el valor esperado ***E(X)*** es igual a ***np***.

22) Sea X una variable aleatoria con distribución binomial ***B(k,n,p).*** Demuestre que la varianza ***Var(X)*** es igual a ***npq***. Use $\sum k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - (np)^2$.

23) Sea X una variable aleatoria de una distribución binomial con E(X) = 4 y $\sigma(X) = \sqrt{3}$.
   a) Hallar la distribución de X.
   b) Hallar la distribución acumulada de X.
   c) Calcular $P(X<3)$, $P(X\geq 12)$ y $P(10\leq X<13)$.

24) Un fabricante envía a sus clientes lotes de 20 piezas. Supóngase que cada pieza está defectuosa o no lo está y que la probabilidad de que cualquiera de ellas esté defectuosa es del 5%.
   a) ¿Cuál es el número esperado de piezas defectuosas por lote?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que determinado lote no contenga piezas defectuosas?

25) La siguiente gráfica corresponde a la función de probabilidad de X de una distribución binomial con $\mu(X) = 2$. Obtenga la tabla de f y la tabla de F.



2. Distribución Geométrica

Definición: Se realizan pruebas de Bernoully independientes hasta obtener un éxito. La probabilidad de éxito en cada prueba es p, con $0 < p \leq 1$. Sea X el número de pruebas necesarias para obtener el primer éxito, X se llama variable aleatoria geométrica con parámetro p.

Teorema: Si X es una variable aleatoria geométrica con parámetro **p**, entonces, la probabilidad de que el primer éxito se tenga en la **k-ésima** prueba está dado por $\mathbf{P(X=k) = q^{k-1}p}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Con $E(X) = 1/p$ y $Var(X) = (1-p)/p^2$.

Ejercicios Propuestos

1) Anatoly competirá por una marca de tiros libres en una cancha de baloncesto, y se dispone a lanzar hasta anotar una canasta. Se supone que sus tiros son independientes y que su probabilidad constante de anotar una canasta es 4/5.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que necesite menos de 5 lanzamientos?
   b) Obtenga la función de probabilidad.
   c) Obtenga la gráfica de la distribución.

2) Una empresa de empleos encuentra que el 30% de los aspirantes para determinado puesto en la industria tiene conocimientos avanzados de programación. Se seleccionan al azar los aspirantes de un grupo y se entrevistan uno a uno.
   a) Calcular la probabilidad de que el primer aspirante con conocimientos avanzados de programación sea el quinto entrevistado.
   b) Obtenga la función de probabilidad y su gráfica.

3) Sea X una variable aleatoria geométrica con parámetro p. Demuestre que la media de X está dado por $E(X) = 1/p$.

4) Se lanzan cuatro monedas distinguibles y equilibradas hasta que aparezcan dos caras y dos sellos.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten menos de cuatro intentos?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten menos de seis intentos?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que se necesite un número par de intentos?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que se necesite un número impar de intentos?

5) Una ruleta americana generalmente tiene 38 lugares, de los cuales 18 son negros, 18 son rojos y 2 son verdes. Sea X el número de juegos necesarios para obtener el primer rojo.
   a) Obtenga la función de probabilidad de X y la media de X.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca un rojo, si en los cuatro primeros juegos no apareció?

6) Suponga que una urna contiene 10 bolas, de las cuales una es negra. Sea X el número de sustracciones con reemplazo necesarias para sacar la bola negra. ¿Cuál es la función de probabilidad de X y la media de X?

7) Suponga que el 10% de los motores fabricados en determinada línea de montaje son defectuosos. Se seleccionan al azar los motores, uno a la vez, para su prueba.
   a) Calcular la probabilidad de que se encuentre el primer motor no defectuoso en el segundo intento.
   b) Calcular el promedio y la varianza del número de la inspección en la cual se encuentra el primer motor no defectuoso.

8) Los tableros para llamadas de larga distancia de las empresas telefónicas de las ciudades intermedias son de poca capacidad, y esto hace que lograr una llamada entre una de estas ciudades y una ciudad grande en el segmento de 5:00 p.m. a 6:30 p.m. sea difícil. ¿Cuál es la probabilidad de comunicarse en seis intentos, si la probabilidad de tener línea durante este segmento es del 10%?

9) La probabilidad de que una persona apruebe el examen escrito para ingreso a una prestigiosa universidad es del 60%.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona apruebe el examen en el tercer intento?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona apruebe el examen antes del cuarto intento?

10) Se lanzan cinco dados normales hasta que aparezca un doble y un triple de valores diferentes.
   a) Calcular la probabilidad de que aparezca este resultado en el primer intento.
   b) Calcular la probabilidad de que aparezca el resultado en el cuarto intento.
   c) Calcular la probabilidad de que aparezca el resultado en un número par de intentos.
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que salga este resultado después del octavo intento?.

11) Un juego consiste en lanzar nueve dados normales y apostar a cierto resultado.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un doble, un triple y un cuádruplo, de valores diferentes, por primera vez en octavo intento?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un cuádruplo y un quíntuplo, de valores diferentes, por primera vez después de décimo juego?

12) Supóngase que X es una variable aleatoria geométrica con parámetro ***p***. Demuestre que la probabilidad de obtener el primer éxito después de la m-ésima prueba es $(1-p)^m$.

13) Un jugador de cartas extrae cinco cartas de una baraja francesa y apostar a cierto resultado.
   a) Si el jugador apuesta a que resultará una escalera normal, ¿Cuál es la probabilidad de que logre ganar por primera vez en el quinto juego?
   b) Si el jugador apuesta a que resultará una pareja y una terna, ¿Cuál es la probabilidad de que gane por primera vez después del quinto juego?

14) Un puerto marítimo de cierto país recibe anualmente muchos barcos cargados de cajas con electrodomésticos. Normalmente cada barco trae 10 grandes cajas. Se sospecha que un barco trae un cargamento de tóxicos en una de las cajas. La probabilidad de que un barco traiga un cargamento de tóxicos es del 10%. ¿Cuál es la probabilidad de que la ultima caja del segundo barco revisado contenga los tóxicos?

15) Un jugador recibe una mano de 5 cartas de una baraja normal de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que reciba una pareja de figuras y una terna de números, por primera vez, en un número par de intentos?

16) Durante la temporada de vacaciones, una línea aérea vende 150 pasajes para viajar a cierta ciudad y todos los equipajes pasan uno a uno a través de un detector de armas. La probabilidad de que un pasajero lleve un arma en su equipaje es del 5%. ¿Cuál es la probabilidad de que el octavo equipaje sea el primero descubierto con un arma?

17) Un aprendiz de mago trae dos sombreros y una baraja normal de 52 cartas. En el primer sombrero introduce todas las figuras rojas y los números pares negros, mientras que en el segundo sombrero introduce todas las figuras negras y los números impares rojos. Saca una carta del primer sombrero y, sin verla, la introduce en el segundo sombrero. Finalmente se saca una carta del segundo sombrero. El aprendiz promete que la carta que sacará del segundo sombrero será roja. Suponiendo que nuestro aprendiz de mago no sabe mucho y que está confiado en su buena suerte, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga éxito después de su quinto intento?

18) En una fabrica de tornillos, se ha determinado que el error por exceso (x) en la medida del diámetro en tornillos para maquinaria pesada varía de 0 a 1 milímetro. En particular, para tornillos cuyo diámetro es de 4 cm, se ha comprobado que la probabilidad de que el diámetro sea (4+x) cm se puede evaluar mediante la función de densidad de la forma $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{(1+x^2)}, & 0< x<1\\ 0, & \text{en los demás valores}\end{cases}$. Si el departamento de control de calidad revisa los tornillos uno a uno, ¿Cuál es la probabilidad que entre los 4 primeros tornillos revisados no se encuentre uno cuyo diámetro sea superior a 4.05 cm?

19) Los bachilleres de varios colegios son examinados uno a uno en el batallón de la localidad para determinar si son aptos o no para prestar el servicio militar. La probabilidad de que un bachiller sea apto es del 80%. ¿Cuál es la probabilidad de que el décimo joven examinado sea el primero no apto para prestar servicio militar?

20) Supóngase que el hecho de encontrar petróleo en un sitio de perforación es independiente de encontrarlo en otro y que, en una región determinada, la probabilidad de éxito en un sitio individual es del 30%.
   a) ¿Qué probabilidad hay de que un perforador encuentre petróleo en su tercera perforación o antes?
   b) Si X es el número de perforaciones hasta que ocurre el primer éxito, calcule la media y la desviación estándar de X.

3. Distribución de Pascal

Definición: Sea X el número de intentos necesarios o el intento en que se presenta el k-ésimo éxito en una secuencia de pruebas de Bernoully independientes, y **p** la probabilidad común de éxito; entonces, la probabilidad de que el k-ésimo éxito se tenga en el x-ésimo ensayo es $P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, \ (x \geq k)$.

Teorema: Si X es una variable aleatoria de Pascal con parámetros p y k, entonces:

a) $E(X) = \dfrac{k}{p}$

b) $Var(X) = \dfrac{k(1-p)}{p^2}$

Ejercicios Propuestos

1) Un gran número de personas presenta una entrevista en una empresa, que requiere profesionales con altos conocimientos en informática, para llenar tres vacantes. Si el 25% de los aspirantes entrevistados poseen conocimientos avanzados de informática, ¿Cuál es la probabilidad de que con el octavo entrevistado se termine la selección?

2) Una persona lanza al aire tres monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que en el quinto lanzamiento obtenga por segunda ocasión tres caras o tres sellos?

3) Sea X una variable aleatoria binomial negativa con p=2/5.
   a) Calcular P(X≥4), si k=2.
   b) Calcular P(X≥4), si k=4.

4) Supóngase que el 10% de los motores fabricados en determinada línea de montaje son defectuosos. Los motores se seleccionan al azar, uno a la vez, para someterlos a una prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que el tercer motor no defectuoso se encuentre en la quinta prueba o antes?

5) Los empleados de una fábrica de aislantes son examinados, uno a uno, para ver si hay residuos de asbesto en sus pulmones. Se pide a la empresa que mande a tres empleados (cuyos resultados fueron positivos) a un centro médico para realizarles exámenes más especializados. Si en el 40% de los empleados hubo resultados positivos en la detección de asbestos en sus pulmones, calcular la probabilidad de que se deba analizar a 10 empleados para encontrar a tres con asbesto en sus pulmones.

6) Si la tercera parte de las personas que donan sangre a una clínica son del grupo O^+, ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo donador O^+ sea el cuarto donador del día?

7) Un estudio geológico indica que un pozo de exploración perforado en determinada zona debe encontrar petróleo con una probabilidad del 20%. Calcular la probabilidad de que el tercer hallazgo de petróleo se tenga en el quinto pozo perforado.

8) Un gran lote de llantas contiene un 10% de llantas defectuosas, y de ahí se seleccionarán cuatro llantas para colocarlas en un auto
   a) Hallar la probabilidad de que deban seleccionarse seis llantas del lote para obtener cuatro llantas en buen estado.
   b) Calcule el valor esperado y la varianza del número de selecciones que deben efectuarse para obtener cuatro llantas sin defectos.

9) Las líneas telefónicas que entran a una oficina de reservaciones de aerolíneas están ocupadas un 60% del tiempo. Si dos personas deben hacer llamadas separadas a esta oficina, ¿Cuál es la probabilidad que deban hacer un total de cuatro intentos para lograr las dos llamadas?

10) Un electrodoméstico se vende en dos colores, blanco y rojo, y tienen igual demanda. Un vendedor de electrodomésticos tiene tres de cada color en existencia, aunque esto no lo saben los clientes, quienes llegan y piden en forma independiente estos electrodomésticos.
    a) ¿Cuál es la probabilidad de que se pidan todos los blancos antes del primero de los rojos?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que se pidan todos los blancos antes de que se agoten los rojos?

11) Una persona recibe una mano de 5 cartas de una baraja normal de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que reciba 2 jotas y 3 números diferentes mayores que 5, por tercera vez en la octava mano?

12) La probabilidad de que un habitante de cierta ciudad tenga un auto es del 30%. Encuentre la probabilidad de que la décima persona entrevistada aleatoriamente en esta ciudad sea la quinta persona que tenga un auto?

13) Cinco monedas que no tienen cara y sello sino 2 y 3, se lanzan varias veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma igual a 12, por tercera vez, en el décimo intento?

14) Un científico inocula varios ratones, uno a uno, con un germen de una enfermedad hasta que obtiene dos que la han contraído. Si la probabilidad de contraer la enfermedad es 1/6, ¿Cuál es la probabilidad de que requieran inocular a ocho ratones?

15) Sea X una variable aleatoria que representa la vida en horas de cierto dispositivo electrónico. La función de densidad de probabilidad está dada por la fórmula $f(x)=\begin{cases}20000/x^3, & x>100\\ 0, & x\le 100\end{cases}$. Una empresa que compra con frecuencia dicho dispositivo, ¿Cuál es la probabilidad de que el octavo dispositivo comprado sea el segundo en durar más de 300 horas?

16) De acuerdo con un estudio publicado por un grupo de sociólogos de la Universidad de Massachusetts, alrededor de los 2/3 de la población estadounidense que consume valium son mujeres. Suponiendo que esta es una estimación válida, ¿Cuál es la probabilidad de que en un determinado día la quinta receta médica por valium sea la tercera prescripción de valium para una mujer?

17) En un lago de una región costera se seleccionan muestras de agua para determinar su pH, y se ha encontrado que el pH es una variable aleatoria X cuya función de densidad está dada por $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}(7-x)^2, & 5\le x\le 7\\ 0, & \text{en los demás valores}\end{cases}$. ¿Cuál es la probabilidad de que la sexta muestra analizada, sea la segunda muestra con un pH superior a 6?

18) Encuentre la probabilidad de que una persona que lanza una moneda obtenga la tercera cara en el séptimo lanzamiento.

19) Se lanzan 5 dados normales varias veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un doble y un triple (de valores diferentes) por segunda vez, antes del octavo intento?

20) Una pareja desea exactamente dos niñas en su familia, y deciden tener hijos hasta cumplir ese deseo. Si la probabilidad de que nazca una niña es del 50%, ¿Cuál es la probabilidad de que la familia tenga cuatro hijos?

4. Distribución Hipergeométrica

Definición: Supóngase que se tienen **N** objetos, de los cuales **k** objetos son de tipo 1 (éxito), y **N-k** objetos son de tipo 2 (fracaso), y supóngase que se extraen **n** objetos sin reemplazo. Si la variable aleatoria X se define como el número de éxitos entre los **n** objetos seleccionados, entonces tenemos un experimento **hipergeométrico**, cuya función de probabilidad está dada por $P(X=x) = \dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \le x \le k \le N; \quad 0 \le x \le n \le N.$

Teorema: Si X es una variable aleatoria hipergeométrica con parámetros N, k y n, entonces:

a) $E(X) = \dfrac{nk}{N}$

b) $Var(X) = \dfrac{nk}{N} \cdot \dfrac{N-k}{N} \cdot \dfrac{N-n}{N-1}$

Ejercicios Propuestos

1) Un comité compuesto por 5 personas se selecciona aleatoriamente de un grupo formado por 3 estadistas y 5 economistas. Encuentre la distribución de probabilidad para el número de estadistas en el comité.

2) En un departamento de control de calidad, un lote de 30 componentes se considera aceptable si no contiene más de 4 componentes defectuosos. El procedimiento de muestreo del lote consiste en seleccionar 6 componentes aleatoriamente y rechazar el lote si se encuentra un componente defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente un componente defectuoso se encuentre en la muestra si hay 4 defectuosos en todo el lote?

3) De un grupo de 10 profesionales, 4 de medicina y 6 de ingeniería, se seleccionan aleatoriamente un comité de 4 personas. Grafique la distribución de probabilidad para el número de médicos en el comité.

4) Si se reparten 8 cartas de una baraja normal de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellas sean figuras?

5) Para evitar que lo descubran en la aduana, un viajero ha colocado 6 tabletas de narcótico en un frasco que contiene 9 píldoras de vitamina con similar apariencia. Si el oficial de la aduana selecciona 3 tabletas aleatoriamente para analizarlas, ¿Cuál es la probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión ilegal de narcóticos?

6) Un comité de salubridad de 4 personas se forma aleatoriamente, seleccionando de entre 6 médicos y 3 enfermeras. La variable X se define como el número de médicos en el comité. Escriba la función de probabilidad de X y calcule $P(2 \le X \le 4)$.

7) El dueño de un colegio siembra 7 tallos que selecciona al azar de una caja que contiene 6 tallos de pino y 5 tallos de eucalipto. ¿Cuál es la probabilidad de que siembre 3 tallos de pino y 4 de eucalipto?

8) Un jugador recibe 13 cartas de una baraja normal de 52 cartas; ¿Cuál es la probabilidad de que reciba todas las figuras negras?

9) ¿Cuál es la probabilidad de que un mesero se rehuse a servir bebidas alcohólicas únicamente a dos menores de edad, si verifica aleatoriamente solo 5 identificaciones de entre 9 estudiantes, de los cuales 4 no tienen la mayoría de edad?

10) Se sacan al azar 13 cartas de una baraja normal de 52 cartas. Se define la variable aleatoria X como el número de cartas rojas en la muestra. Hallar la función de probabilidad de X, E(X) y Var(X).

11) Un niño recibe 5 cartas de una baraja normal a la que le faltan 4 cartas de corazones y 4 cartas de diamantes. ¿Cuál es la probabilidad de que saque al menos 3 corazones?

12) Un jurado de 7 jueces va a decidir entre dos boxeadores quien es el ganador en una pelea entre Oscar De la Hoya y Felix Trinidad por el título de los welters, para lo cual bastará una mayoría de los jueces. Supóngase que 4 jueces voten por Trinidad y que los otros 3 voten por De la Hoya. Si se seleccionan al azar 3 jueces y se les pregunta por quien votaron, ¿Cuál es la probabilidad de que la mayoría de los jueces de la muestra dieron su voto a favor de Trinidad?

13) ¿Para sacar la selección ideal del beisbol de las grandes ligas, el pueblo norteamericano mediante votación vía internet elige a 12 jugadores de la liga nacional, 16 jugadores de la liga americana, y dos managers cada liga. Cada uno de los cuatro managers selecciona a 3 jugadores. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 8 de los jugadores seleccionados sean de la liga Nacional?

14) De una urna que contiene m bolas blancas y n bolas (m>n), se seleccionan aleatoriamente m-n+2 bolas, sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccionen exactamente m-n-2 bolas blancas?

15) La emisora de un colegio adquirió las 9 sinfonías de Beethoven y los 27 conciertos para piano de Mozart. Si en una mañana se alcanzan a programar 6 de estas obras, ¿Cuál es la probabilidad de que programe al menos 3 de Beethoven?

16) En un almacén hay 10 impresoras, y 4 de ellas son defectuosas. Una compañía selecciona al azar 5 de ellas para comprarlas. ¿Cuál es la probabilidad de que las 5 máquinas seleccionas no tengan defectos?

17) En un recipiente se encuentran n artículos defectuosos y 2n artículos defectuosos (n par); si se saca la tercera parte de los artículos, ¿Cuál es la probabilidad de que la mitad de ellos sean buenos?

18) Un motor de 8 cilindros tiene 2 bujías que fallan. Si se quitan 4 bujías del motor, ¿Cuál es la probabilidad de que entre ellas se encuentren las dos que tiene fallas?

19) Un director técnico de tenis tiene una canasta con 25 pelotas, 15 de éstas son nuevas y 10 son usadas. Cada uno de 4 jugadores selecciona al azar 3 pelotas para un juego. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 8 de las pelotas seleccionadas sean nuevas?

20) Un geólogo ha recolectado 10 especímenes de roca basáltica y 10 de granito. El geólogo instruye a un asistente de laboratorio para que seleccione al azar 15 de los especímenes para analizarlos.
    a) ¿Cuál es la función de probabilidad para el número de especímenes de basalto seleccionados para analizarlos?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los especímenes de uno de los dos tipos de roca sean seleccionados para el análisis?

5. Distribución de Poisson

Definición: Un experimento en donde la variable aleatoria X se define como el número de resultados favorables en un intervalo de tiempo o en una región específica, se llama **Experimento de Poisson**. Es un experimento en donde eventos discretos se generan en un espacio continuo. El número promedio de resultados por unidad de tiempo o región se designa con μ ó λ. El número promedio para t periodos de tiempo o t regiones se designa con λt. Algunos ejemplos de experimentos de Poisson son:

- Número de autos que llegan a un supermercado entre las 10:00 y 11:00 a.m.
- Número de llamadas que entran a un conmutador telefónico entre la 1:00 y 3:00 p.m.
- Número de defectos detectados en un segmento de 100 pies de cable.
- Número de imperfectos detectados en un metro cuadrado de tela.
- Número de insectos en una fanegada de terreno cultivado.

Teorema: Si X es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λ, entonces la probabilidad de obtener x casos favorables en un intervalo de tiempo o región específica t, está dada por $P(X=x)=\dfrac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$, con x=0,1,2,3, … La función de probabilidad de Poisson se puede obtener a partir de la función de probabilidad binomial cuando n es muy grande y p muy pequeño.

Teorema: Si X es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λ, entonces $E(X)=Var(X)=\lambda$.

Ejercicios Propuestos

1) Demuestre que la distribución binomial se aproxima a la distribución de Poisson, cuando $n\to\infty$, $p\to 0$ y $\lambda=np$ permanece constante.

2) Un libro de 500 páginas tiene un total de 300 errores.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que una página dada tenga exactamente 4 errores?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que una página dada tenga 2 o más errores de impresión?

3) Supóngase que el 3% de los artículos manufacturados en una fábrica tienen defectos.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote de 200 artículos haya 5 defectuosos?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar menos de 3 artículos defectuosos?
   c) ¿Cuál es la función de probabilidad para x artículos defectuosos?

4) Un estudio indica que el 2% de la población son zurdos. ¿Cuál es la probabilidad de que en una escuela de 400 estudiantes se encuentren más de 4 estudiantes zurdos?
5) El número de partículas radioactivas que pasan a través de un contador de partículas durante un segundo en un experimento de laboratorio es 5. ¿Cuál es la probabilidad de que pasen 8 partículas por el contador en un segundo específico?

6) Supóngase que en una población de 50.000 personas hay un promedio anual de 2 suicidios.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un año dado haya 2 suicidios en una población de 100.000 personas?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un año dado no haya suicidios en una población de 100.000 personas?

7) En una editorial se encuentra un gran número de libros para revisión y cada libro es de 400 páginas. Se ha comprobado que el número promedio de errores es de 40 por libro. Se seleccionan aleatoriamente 8 libros para cuantificar la cantidad de errores que tiene. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 4 libros contengan 50 o más errores?

8) El número promedio de carros-tanques de aceite que llega diariamente a la central de almacenamiento de una ciudad intermedia es de 10. Las instalaciones del almacén pueden atender a lo máximo 15 carros-tanques en un día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un determinado día se tengan que regresar los carros-tanques?

9) Supóngase que el número promedio de muertes por homicidios en cierta ciudad es de 2 diarias.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que hayan más de 9 homicidios en una semana?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran exactamente 14 homicidios en una semana?

10) El conmutador telefónico de una universidad recibe un promedio de 120 llamadas por hora en el periodo de admisiones.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que no se reciban llamadas durante un minuto en el periodo de admisiones?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que entren de 1 a 5 llamadas inclusive, en un minuto del periodo de admisiones?

11) En un laboratorio se encuentra un gran número de muestras de agua contaminada y cada muestra es de 2 cm^3. Se ha determinado que el número promedio de colonias de bacterias en una muestra es de 3 por cm^3. Si se seleccionan 6 muestras de agua del laboratorio, ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 3 muestras contengan 2 o más colonias de bacterias?

12) En una fábrica metalmecánica han ocurrido accidentes a razón de uno cada dos meses. Suponiendo que ocurren en forma independiente,
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya accidentes en un mes específico?
   b) ¿Cuál es el valor esperado de accidentes al año?

13) Supóngase que la página impresa de un libro contiene 40 líneas, y que cada línea contiene 75 espacio (que pueden estar en blanco u ocupados con algún símbolo). En cada página se forman 3000 espacios. Supóngase que el editor comete un error por cada 6000 espacios, en promedio. ¿Cuál es la probabilidad de que una página no contenga errores? ¿Cuál es la probabilidad de que un capítulo de 16 páginas no contenga errores?

14) El número promedio de colonias de bacterias en una muestra de agua contaminada es de 2 por cm^3. Si se seleccionan 4 muestras de un cm^3 de agua, ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una muestra contenga una o más colonias de bacterias?

15) En cierta intersección de dos calles, ocurren en promedio, 3 accidentes viales por mes. ¿Cuál es la probabilidad de que en un determinado mes, ocurran exactamente 5 accidentes en esta intersección?

16) El número de imperfectos en el tejido de una tela es, en promedio, de 4 por metro cuadrado. Calcular la probabilidad de que una muestra de 3 metros cuadrados tenga al menos un imperfecto.

17) El número promedio de ratas de campo por fanegada, en un campo de algodón de 10 fanegas, se estima que es de 12. ¿Cuál es la probabilidad de que en una fanegada determinada se encuentren menos de 7 ratas?

18) La probabilidad de que un estudiante de cierta universidad presente problemas de escoliosis es de 0.004. Si se examinan 1875 estudiantes, ¿Cuál es la probabilidad de que presenten este problema menos de 5 estudiantes?

19) La probabilidad de que una persona muera de tuberculosis es de 0.002. ¿Cuál es la probabilidad de que mueran menos de 5 personas de las próximas 2000 personas infectadas?

20) Una fábrica de telas lleva al departamento de control de calidad un gran número de muestras de tela de su última producción para determinar la cantidad de imperfectos de fabricación; en una primera fase se determinó que en 1 m^2 de tela hay un promedio de 4 imperfectos. ¿Cuál es la probabilidad de que en 10 muestras revisadas haya por lo menos 5 que tengan menos de 4 imperfectos, si cada muestra es de 2.5 m^2?