PROBABILIDADES
GUIA No 4

VARIABLES ALEATORIAS

1. Variables Discretas

Definición: Sea E un experimento con espacio muestral S. Una función cuyo dominio es S y cuyo recorrido es un conjunto de números reales se denomina **Variable Aleatoria**. Es decir, Si X representa la variable aleatoria y tiene como dominio el espacio muestral $S = \{ s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{n, \ldots} \}$, el valor $X(s_k)$ es el número real **x** que se asigna al elemento s_k en virtud de la relación funcional. Los valores x forman el campo o recorrido R_X de la Variable Aleatoria X. Las Variables Aleatorias se clasifican en Discretas, Continuas y Conjuntas. Si la variable aleatoria X toma sus valores en un conjunto discreto es una variable aleatoria discreta, si toma todos los valores de un intervalo [a,b] es una variable aleatoria continua. Si X y Y son variables aleatorias definidas sobre S, entonces el par (X,Y) es una variable aleatoria conjunta.

Definición: Una **Variable Aleatoria Discreta X** es la que puede tomar sólo un número finito o infinitos contable de valores x.

Definición: Sea $S = \{ s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n \}$ el espacio muestral de un experimento sobre el cual se ha definido una variable aleatoria X con recorrido $R_X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$. La probabilidad de que el valor de X sea un determinado x de R_X está dada por $P(X=x) = p(x) = f(x) = P(\{ s_k \in S \mid X(s_k) = x\})$. La función f se llama **función de probabilidad de X, función de masa de probabilidad de X o distribución de probabilidad de la variable aleatoria X.** La función f satisface:
a) $f(x) \geq 0$, para cada $x \in R_X$.
b) $\Sigma f(x) = 1$, $x \in R_X$.
c) $P(X=x) = f(x)$.

La función de probabilidad de X se puede representar de dos formas:
a) Una tabla de probabilidad, donde se muestren las parejas ordenadas (x , f(x)), $x \in R_X$. El conjunto { (x,f(x)) } se le llama distribución de probabilidad de X.
b) Un diagrama con un eje horizontal para los valores x, un eje vertical para las probabilidades de x, un segmento de longitud p(x) = f(x) sobre cada valor x. Este diagrama se conoce como el ábaco de probabilidad.

Definición: Sea $S = \{ s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n \}$ un espacio muestral equiprobable, X una variable aleatoria con recorrido $R_X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$, entonces:

$$f(xi) = P(X = x_i) = \frac{\text{Nùmero de puntos de S cuya imagen es } x_i}{\text{Nùmero de puntos de S}}$$

Definición: La función F, cuyo valor para todo real x está dada por $F(x) = P(X \leq x) = P(\{ s_k \in S \mid X(s_k) \leq x \})$, se denomina **función de distribución** o **distribución acumulada** de la variable aleatoria X, cuya función de probabilidad es f. La función de distribución o acumulada F se puede obtener a partir de la función de probabilidad f. La función de distribución F satisface las siguientes condiciones:

a) Existe m tal que $F(x) = 0$, para todo $x < m$.
b) Existe M tal que $F(x) = 1$, para todo $x \geq M$.
c) F es no decreciente, es decir: $F(a) \geq F(b)$, para todo par $a,b \in R$ con $a \geq b$.
d) F es una función escalonada con un número finito de saltos.
e) El dominio de F es el conjunto de los Reales y el recorrido es el intervalo [0,1].
f) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Definición: Supóngase que S es el espacio muestral de cierto experimento sobre el cual se define una variable aleatoria X, y sea f la función de probabilidad de la variable X definida como sigue:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	. . .	x_n
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	. . .	$f(x_n)$

Entonces:

1) La media, **Valor Esperado** o Esperanza de X es la medida del promedio de la variable aleatoria X, y se define como:

$$E(X) = \mu_X = x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + . . . + x_nf(x_n) = \Sigma\, x_if(x_i).\ \ i=1,2,3,...n.$$

2) La **Varianza** de X es la medida del esparcimiento o dispersión de la variable X, y se define como:

$$Var(X) = (x_1-\mu)^2f(x_1) + (x_2-\mu)^2f(x_2) + . . . + (x_n-\mu)^2f(x_n) = \Sigma\, (x_i-\mu)^2f(x_i).$$

$$Var(X) = \Sigma\, (x_i)^2f(x_i) - \mu^2 .$$

3) La **Desviación Estándar** de X es la raiz cuadrada de la varianza de X, y se denota con σ_X.

Ejemplo 1:

Se lanzan dos dados distinguibles. Se define la variable aleatoria X como el promedio de los números resultantes.

a) Describa la variable X

El espacio muestral para este experimento es: $S = \{(x,y) \mid x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

A cada pareja (x,y) o elemento de este espacio muestral le asignamos el número $\frac{x+y}{2}$, que es lo que indica la relación funcional.

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{X : S} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\
(1,1) & \longrightarrow & 1{,}0 \\
(1,2) & \longrightarrow & 1{,}5 \\
(1,3) & \longrightarrow & 2{,}0 \\
(1,4) & \longrightarrow & 2{,}5 \\
(1,5) & \longrightarrow & 3{,}0 \\
(1,6) & \longrightarrow & 3{,}5 \\
\ldots & & \\
(2,6) & \longrightarrow & 4{,}0
\end{array}
$$

…
(3,6) ⟶ 4,5
…
(4,6) ⟶ 5,0
..
(5,6) ⟶ 5,5
(6,6) ⟶ 6,0

b) Obtenga el recorrido de X

Se puede verificar que los únicos promedios posibles son los números 1.0 , 1.5 , 2.0 , 2.5 , 3.0 , 3.5 , 4.0 , 4.5 , 5.0 , 5.5 y 6.0. Por lo tanto el recorrido de la variable aleatoria X es:

R_X = { 1.0 , 1.5 , 2.0 , 2.5 , 3.0 , 3.5 , 4.0 , 4.5 , 5.0 , 5.5 , 6.0 }

c) Obtenga la tabla de Probabilidades

El espacio muestral S de este experimento tiene 6x6 = 36 puntos muestrales.

En la tabla 1 se muestra la cantidad de puntos muestrales que tienen como imagen 1, 1.5, 2, 2.5, . . . y 6. En la tabla 2 se muestran las probabilidades para cada uno de los valores de la variable X.

d) Obtenga la Distribución Acumulada de X

Con base en la Tabla 2, se obtiene la tabla 3, sumando progresivamente los elementos de la columna 2 de la tabla 2.

Rx	#(Sx)
1,0	1
1,5	2
2,0	3
2,5	4
3,0	5
3,5	6
4,0	5
4,5	4
5,0	3
5,5	2
6,0	1

Tabla 1.

Rx	P(X=x)
1,0	1/36
1,5	2/36
2,0	3/36
2,5	4/36
3,0	5/36
3,5	6/36
4,0	5/36
4,5	4/36
5,0	3/36
5,5	2/36
6,0	1/36

Tabla 2.

Rx	P(X<=x)
1,0	1/36
1,5	3/36
2,0	6/36
2,5	10/36
3,0	15/36
3,5	21/36
4,0	26/36
4,5	30/36
5,0	33/36
5,5	35/36
6,0	36/36

Tabla 3.

e) Calcule el valor esperado de X.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} x_k f(x_k) = 3,5$$

Ejercicios Propuestos

1) Para la variable aleatoria X definida en cada uno de los siguientes experimentos, obtenga el espacio muestral S, el recorrido R_X , tabla de la distribución *f* y gráfica de la función de probabilidad *f.*

a) Se lanza un dado normal. Se define la variable aleatoria X como el beneficio de un jugador en un juego en donde gana 1 peso si sale 1, 2 o 3, y pierde un peso si sale 4, 5 o 6.

b) Se lanzan 2 dados normales. Se define la variable aleatoria X como la suma de los números resultantes en los dados.

c) Se seleccionan al azar tres personas de la lista de los votantes registrados en un condado de California. El porcentaje de votantes republicanos es el 40%. ¿Cuál es la probabilidad de que en una selección hayan 0, 1, 2, 3 republicanos?

d) En el juego TRIP & CHIN se lanzan tres dados no cargados, y se permite que el jugador apueste cierta cantidad de dinero a la ocurrencia de uno de los números enteros 1, 2, 3, 4, 5, 6. Supongamos que Anatoly apuesta la ocurrencia de un cinco. Entonces, si sale un cinco se gana un rublo, si salen dos cincos se gana dos rublos, si salen tres cincos se gana tres rublos, y si no aparecen cincos pierde un rublo. Se define la variable aleatoria X como la cantidad neta ganada en una lanzada de los dados en dicho juego.

e) Una muestra de tres objetos se selecciona al azar de una caja que contiene doce objetos, de los cuales tres son defectuosos. Se define la variable aleatoria X como el número de objetos defectuosos en la muestra seleccionada.

f) Una moneda se lanza tres veces; la moneda está cargada de tal manera que P(C) = 2/3 y P(S) = 1/3. Se define la variable aleatoria X como el número de caras consecutivas que salen.

g) Un embarque de ocho computadoras similares que se envía a un distribuidor contiene tres aparatos defectuosos. Una escuela escoge aleatoriamente dos de estas computadoras y las compra. Se define la variable aleatoria X como el número de computadoras defectuosas entre las computadoras compradas.

h) Una urna contiene 4 bolas numeradas 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Sea X la variable aleatoria definida como el número de la bola sacada al azar de la urna.

i) Una agencia vende automóviles equipados para trabajar con Diesel y automóviles equipados para trabajar con gasolina. El 50% de los automóviles son modelos Diesel. Se define la variable aleatoria X como la cantidad de modelos Diesel vendidos entre los próximos cuatro automóviles que venda la agencia.

j) Hay 10 estudiantes inscritos en un curso de comercio electrónico, de los cuales 3 tienen 19 años, 4 tienen 20 años, 1 tiene 21 años, 1 tiene 24 años y 1 tiene 26 años. De este curso se seleccionan dos estudiantes al azar sin reemplazo. Sea X la edad promedio de los dos estudiantes seleccionados.

2) A partir de cada una de las siguientes tablas de probabilidad, obtenga la tabla de distribución acumulada y la gráfica de F.

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
f(x)	*5/30*	*3/30*	*4/30*	*1/30*	*5/30*	*8/30*	*4/30*

u	*-2*	*0*	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*
f(u)	*3/25*	*3/25*	*2/25*	*2/25*	*4/25*	*5/25*	*6/25*

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
f(n)	*1/7*	*1/7*	*1/7*	*1/7*	*1/7*	*1/7*	*1/7*

3) A partir de cada una de las siguientes tablas de distribución acumulada, obtenga la tabla de probabilidad y la gráfica de f.

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
F(x)	*2/25*	*7/25*	*10/25*	*17/25*	*25/25*

a	-4	-2	0	2	4	6
F(a)	3/30	8/30	15/30	20/30	26/30	30/30

v	0	1	2	3	4
F(v)	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5

4) A continuación se dan algunas funciones de distribución F. Escriba estas funciones usando la notación funcional.

n	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*
F(n)	*2/25*	*7/25*	*10/25*	*17/25*	*25/25*

t	-2	-1	0	1	2	3
F(t)	3/30	8/30	15/30	20/30	26/30	30/30

u	0	3	6	9	12
F(u)	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5

5) Se lanzan 2 dados normales. Se define la variable aleatoria X como la suma de los números resultantes en los dados. Calcular $P(X \leq 8)$.

6) En el juego TRIP & CHIN se lanzan tres dados no cargados, y se permite que el jugador apueste cierta cantidad de dinero a la ocurrencia de uno de los números enteros 1, 2, 3, 4, 5, 6. Supongamos que Anatoly apuesta la ocurrencia de un cinco. Entonces, si sale un cinco se gana un rublo, si salen dos cincos se gana dos rublos, si salen tres cincos se gana tres rublos, y si no aparecen cincos pierde un rublo. Se define la variable aleatoria X como la cantidad neta ganada en una lanzada de los dados en dicho juego. Calcular $P(X \leq 2)$.

7) Una muestra de tres objetos se selecciona al azar de una caja que contiene doce objetos, de los cuales tres son defectuosos. Se define la variable aleatoria X como el número de objetos defectuosos en la muestra seleccionada. Hallar $P(1 < X \leq 3)$.

8) Un embarque de diez computadoras similares que se envía a un distribuidor contiene cuatro aparatos defectuosos. Una escuela escoge aleatoriamente tres de estas computadoras y las compra. Se define la variable aleatoria X como el número de computadoras defectuosas entre las computadoras compradas. Hallar $P(X \leq 2)$.

9) Una agencia vende automóviles equipados para trabajar con Diesel y automóviles equipados para trabajar con gasolina. El 40% de los automóviles son modelos Diesel. Se define la variable aleatoria X como la cantidad de modelos Diesel vendidos entre los próximos cinco automóviles que venda la agencia. Hallar $P(2 < X \leq 4)$

10) Hay 10 estudiantes inscritos en un curso de comercio electrónico, de los cuales 3 tienen 19 años, 4 tienen 20 años, 1 tiene 21 años, 1 tiene 24 años y 1 tiene 26 años. De este curso se seleccionan dos estudiantes al azar sin reemplazo. Sea X la edad promedio de los dos estudiantes seleccionados. Calcular la probabilidad $P(20 < X \leq 22)$.

11) Una urna contiene 5 bolas numeradas 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente. Sea X la variable aleatoria definida como el número de la bola sacada al azar de la urna. Hallar $P(1<X\leq3)$.

12) se lanzan dos dados normales y se define la variable aleatoria X como la suma de los números resultantes. Calcular el valor esperado, la varianza y la desviación estándar de la variable X.

13) Un jugador lanza un dado normal en un juego; si sale un número par gana la misma cantidad en dólares, si sale un número impar pierde esa misma cantidad en dólares. Se define la variable aleatoria como el beneficio del jugador en un lanzamiento del dado. Calcular la media, la varianza y la desviación estándar de X. ¿Este juego es favorable, equilibrado o desfavorable para dicho jugador?

14) Una urna contiene 5 bolas numeradas del 1 al 5, se saca una bola de la urna. Se define la variable aleatoria X como el número de la bola resultante. Calcular la media, la varianza y la desviación estándar de X.

15) Para el juego del TRIP & CHIN expuesto en el ejercicio 15, calcule el valor esperado, la varianza y la desviación estándar de la variable "cantidad ganada por el jugador en un lanzamiento de los dados". ¿El juego es favorable?

16) 15 estudiantes conforman el equipo de Softbol de cierta universidad, de ellos 4 tienen 17 años, 4 tienen 18 años, 3 tienen 20 años, 2 tienen 22 años, 1 tiene 24 años y 1 tiene 25 años. De este grupo se seleccionan dos estudiantes al azar sin reemplazo. Sea X la edad promedio de los dos estudiantes seleccionados. Calcule la media, la varianza y la desviación estándar de X.

17) Se lanza una moneda corriente 6 veces hasta obtener 1 cara o 6 sellos. ¿Cuál es el valor esperado, la varianza y la desviación? (La variable aleatoria X se puede definir como el número de lanzamientos necesarios para obtener una cara o seis sellos).

18) Un objeto de tiro al blanco está formado por tres cuadrados concéntricos de lados 30 cm, 20 cm y 10 cm, formando las zonas 1, 2 y 3. La probabilidad de pegar en cualquiera de las zonas del blanco es 2/3, y la probabilidad de pegar por fuera del blanco es 1/3. Si logra pegar en la zona 1 se gana $ 60, si pega en la zona 2 se gana $ 40, y si pega en la zona 3 se gana $ 20. Hallar f, el valor esperado, la varianza y la desviación estándar. (Figura 1)

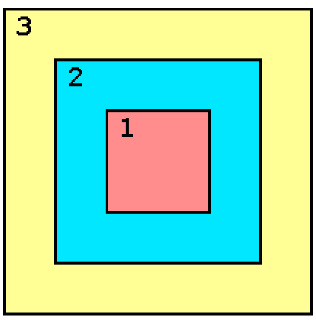

FIGURA 1

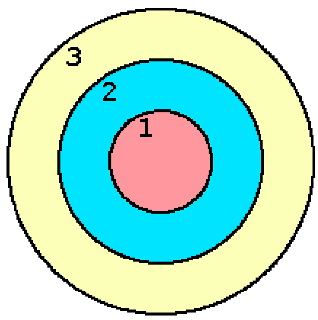

FIGURA 2

19) Un objeto de tiro al blanco está formado por tres círculos concéntricos de radios 10 cm, 20 cm y 30 cm. Un hombre que dispara al blanco recibe 15 puntos, 10 puntos o 5 puntos, según pegue en el círculo pequeño (zona 1), en el anillo pequeño (zona 2), o en el anillo grande (zona 3). La probabilidad de que el disparo haga contacto con cualquiera de las tres zonas del blanco es 1/2, y la probabilidad de no dar en el blanco es 1/2. Hallar f, el valor esperado, la varianza y la desviación estándar. (Figura 2)

20) Para la función de probabilidad de X que se muestra en la FIGURA 3; obtenga la función F, μ(X), Var(X) y σ(X).

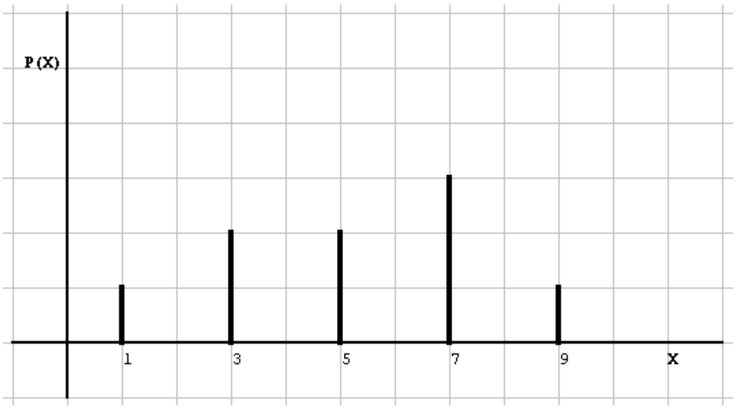

FIGURA 3 : Función de Probabilidad de X

21) Para la distribución acumulada de X que se muestra en la FIGURA 4; obtenga la función f, μ(X), Var(X) y σ(X).

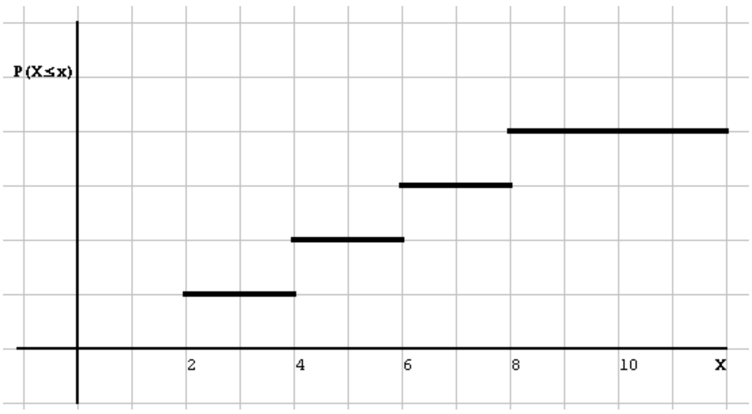

FIGURA 4: Distribución Acumulada de X

2. Variables Continuas

Definición: Sean a,b reales tales que a<b; Si X está definida como todos los resultados que se encuentran en el intervalo [a,b], entonces X es una variable aleatoria continua, y su distribución de probabilidad se representará con una función *f(x)* que se llamará **función de densidad**.

Definición: La función f(x) es una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria continua X, definida en el conjunto de los números reales, si:

1) $f(x) > 0$, para todo $x \in R$.
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$
3) $P(a<X<b)= \int_a^b f(x)dx.$

Si $\int_a^b g(x)dx = 1$, normalmente la función de densidad se escribe de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), \text{ si } a < x < b \\ 0 \text{ , si } x \in R-(a,b) \end{cases}$$

Definición: La distribución acumulada de una variable aleatoria continua X con una función de densidad f(x) está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad x \in R.$$ Además *P(a<X<b) = F(b)-F(a).*

Definición: Sea X una variable aleatoria continua. El valor esperado de X y la varianza de X, se definen respectivamente como:

1) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

2) $Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$

Siempre y cuando las integrales existan.

Ejemplo 2:

El tiempo de vida útil, en días, de frascos de cierta medicina es una variable aleatoria X que tiene la función de densidad $f(x) = \begin{cases} k/(x+100)^3, & x > 0. \\ 0, & \text{en los demás valores} \end{cases}$

a) ¿Cuál debe ser el valor de k, para que f sea función de densidad de probabilidad?

De la solución de la ecuación $\int_0^{\infty} \frac{k}{(x+100)^3} dx = 1$, se obtiene que $k = 2000$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un frasco de este medicamento tenga una vida útil de al menos 200 días?

$$P(X \geq 200) = \int_{200}^{\infty} \frac{k}{(x+100)^3} dx = \frac{1}{90}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un frasco de este medicamento tenga cualquier duración entre 80 y 120 días?

$$P(80 \leq X \leq 120) = \int_{80}^{120} \frac{k}{(x+100)^3} dx = \frac{100}{9801}$$

d) ¿Cuál es la vida media de los frascos de esta medicina?

$$E(X) = \int_0^{\infty} \frac{2000x}{(x+100)^3} dx = 10 \text{ días}$$

Ejercicios Propuestos

1) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{en los demás valores} \end{cases}$

a) Demuestre que f es una función de densidad.
b) Calcular $P(0<X\leq 1)$

2) Una variable aleatoria continua X que puede tomar valores entre x=2 y x=5 tiene una función *f(x) = 2(1+x)/17*. Hallar:
   a) $P(X<4)$
   b) $P(3<X<4)$

3) La proporción de personas que contestan una encuesta enviada por correo es una variable aleatoria continua X que tiene la función de densidad f(x) definida como $f(x) = \begin{cases} 2(x+2)/5, & 0 < x < 1. \\ 0, & \text{en los demás valores} \end{cases}$
   a) Pruebe que $P(0<X<1)=1$
   b) Encuentre la probabilidad de que más de 1/4, pero menos e 1/2 de las personas en contacto responderán a este tipo de encuesta.

4) Considere la función de densidad $f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x}, & 0 < x < 1. \\ 0, & \text{en los demás valores} \end{cases}$
   a) Evalúe k.
   b) Encuentre F(x) y úsela para evaluar $P(0.3<X<0.6)$.

5) El tiempo de vida útil, en días, de frascos de cierta medicina es una variable aleatoria que tiene la función de densidad $f(x)=\begin{cases}2000/(x+100)^3, & x>0.\\ 0, & \text{en los demás valores}\end{cases}$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un frasco de este medicamento tenga una vida útil de al menos 200 días?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un frasco de este medicamento tenga cualquier duración entre 80 y 120 días?

6) El tiempo de espera, en horas, que tarda un radar en detectar dos conductores sucesivos a alta velocidad es una variable aleatoria continua con una distribución acumulada definida como $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-8x}, & \text{x} > 0\end{cases}$.

Encuentre la probabilidad de esperar menos de 12 minutos entre dos conductores sucesivos usando:

a) Distribución acumulada de X.
b) Función de densidad de probabilidad de X.

7) Sea X una variable aleatoria continua con la función de densidad definida como $f(x)=\begin{cases}x/2, & 0<x<2.\\ 0, & \text{en los demás valores}\end{cases}$.

Hallar la función de distribución acumulada y graficarla.

8) Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad $f(x)=\begin{cases}(6k+x)/6, & 0<x<3.\\ 0, & \text{en los demás valores}\end{cases}$

a) Hallar k.
b) Calcular P(1≤X≤2)

9) Sea X una variable aleatoria continua cuya distribución f es constante k en un intervalo [a,b], y es nula en los demás valores de x.

a) Hallar la constante k. b) Hallar μ. c) Determinar la función F(x).

10) Si la utilidad de un distribuidor, en unidades de $ 1000, en un nuevo automóvil puede considerarse como una variable aleatoria X con una función de densidad definida como:

$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{en los demás valores}\end{cases}$.

Encuentre la utilidad promedio por automóvil.

11) La función de densidad de las mediciones codificadas del diámetro del hilo de un encaje es $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi(1+x^2)}, & 0<x<1\\ 0, & \text{en los demás valores}\end{cases}$. Encuentre el valor esperado de X.

12) Sea X una variable aleatoria que representa la vida en horas de cierto dispositivo electrónico. La función de densidad de probabilidad está dada por la fórmula $f(x)=\begin{cases}20000/x^3, & x>100\\ 0, & \text{x} \le 100\end{cases}$.

Encuentre la vida esperada de este dispositivo.

13) La demanda semanal de una bebida, en miles de litros, de una cadena de supermercados es una variable aleatoria continua X que tiene la función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & en \text{ los demás valores}\end{cases}.$$

Encuentre la media y la varianza de X.

14) El número de horas de vida útil de determinada batería, tiene asociada una función de densidad de probabilidad de la forma $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$.

a) Calcular la probabilidad de que la vida útil de una batería de este tipo sea menor de 200 o mayor de 400 horas. (Tomar x en unidades de 100 horas)
b) Calcular la probabilidad de que una batería de este tipo dure más de 300 horas, dado que ya ha estado en uso más de 200 horas.

15) Supóngase que una variable aleatoria X tiene una función de densidad de probabilidad expresada mediante

$$f(x)=\begin{cases}kx(1-x), & 0\leq x\leq 1\\ 0, & en \text{ los demás valores}\end{cases}.$$

a) Hallar k.
b) Calcular P(0.4≤X≤1)
c) Calcular P(X≤0.4 l X≤0.8)

16) La proporción de impurezas X de determinadas muestras de mineral de cobre es una variable aleatoria que tiene una función de densidad de probabilidad definida como $f(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0\leq x\leq 1\\ 0, & en \text{ los demás valores}\end{cases}$.

Si se seleccionan cuatro muestras de ellas en forma independiente,
a) ¿Cuál es la probabilidad de que una de ellas tenga una proporción de impurezas mayor que 0.5?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una de ellas tenga una proporción de impurezas mayor que 0.5?

17) La radiación solar total por día para determinada zona de la Florida, tiene la función de densidad de probabilidad $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{32}(6-x)(x-2), & 2\leq x\leq 6\\ 0, & en \text{ los demás valores}\end{cases}$.

Las mediciones están en cientos de calorías. Calcular la radiación diaria esperada para octubre.

18) Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es de la forma $f(x)=\sqrt{a-x^2}$.
Determine el valor de a y calcule P(X ≥ a/2)

19) Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada definida como

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \frac{x}{4}\left[1+\ln\left(\frac{4}{x}\right)\right], & 0<x\leq 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

a) Hallar P(X≤1) y P(1≤X≤3).
b) Hallar la función de densidad.

20) En un lago de una región costera se seleccionan muestras de agua para determinar su pH, y se ha encontrado que el pH es una variable aleatoria X cuya función de densidad está dada por la función $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{8}(7-x)^2, \ 5 \le x \le 7 \\ 0, \ \text{en los demás valores} \end{cases}$

a) Calcular E(X) y Var(X).
b) ¿Se puede esperar que la frecuencia con que se encuentren valores de pH menores que 5.5 sea mayor que 0.5?

21) En cierta ciudad, el consumo diario de energía eléctrica (en millones de kw/h) es una variable aleatoria con la función de densidad de probabilidad definida como $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{9}xe^{-\frac{x}{3}}, \ \text{para} \ x>0 \\ 0, \ \text{para} \ x \le 0 \end{cases}$

Si la planta de energía de esta ciudad tiene una capacidad diaria de 12 millones de kw/h, ¿Cuál es la probabilidad de que este suministro de energía resulte inadecuado en cualquier día dado?

22) En probabilidades, una función muy usada para calcular probabilidades cuando una variable X está distribuida normalmente, es la campana de Gauss, que tiene la forma $f(x)=ke^{-\frac{x^2}{2}}$. Encuentre el valor de k para que $\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$.

23) Para calcular la duración x (en años) de un chip de memoria de una computadora mainframe se debe usar una variable aleatoria continua X con función de densidad de la forma $f(x)=\begin{cases} kxe^{-x^2/16} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$.

Encuentre k para que f(x) sea función de densidad y calcule la desviación estándar de X.

24) Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es de la forma $f(x)=ke^{-x^2}$.

a) Determine el valor de k.
b) Encuentre el valor esperado de X

25) Existe una infinidad de funciones de la forma $f(x)=\frac{1}{G(a)b^a}x^{a-1}e^{-\frac{x}{b}}$, para x>0, donde $G(a)=b^a\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$. que se usan para modelar problemas de vida útil. Esta familia de curvas se conoce como ***funciones Gamma***. Demuestre que E(X) = ab y Var(X) = ab^2.

26) Una familia de curvas muy conocida es la familia de ***funciones Betas***, que son de la forma $f(x)=\frac{G(a+b)}{G(a)G(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$, para $0<x<1$. donde $\frac{G(a)G(b)}{G(a+b)}$ se define como $\frac{G(a)G(b)}{G(a+b)}=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$. Demostrar que E(X) = $\frac{a}{a+b}$ y Var(X) = $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

27) Sustituyendo el valor a=1 en la función Gamma, se obtiene la función exponencial, que se define como $f(x)=\begin{cases}(be^{x/b})^{-1}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$, Demostrar que E(X) = b y Var(X) = b^2.

28) Si la proporción de una marca de televisores que requiere servicio durante el primer año de operación es una variable aleatoria que tiene una distribución beta con a = 3 y b = 2, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 80% de los nuevos modelos de esta marca que se vendieron este año requerirán servicio durante su primer año de operación?

29) La distribución Weibull está definida como $f(x)=\begin{cases}(a/b)e^{-\frac{x^a}{b}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$. Demuestre que E(X)=$b^{\frac{1}{a}}G\left(1+\frac{1}{a}\right)$ y Var(X)=$b^{\frac{2}{a}}\left\{G\left(1+\frac{2}{a}\right)-G^2\left(1+\frac{1}{a}\right)\right\}$.

30) Suponga que un sistema contiene cierto tipo de componente cuyos tiempos de falla en años está dado por T. La variable aleatoria T se modela bien mediante la distribución exponencial con tiempo medio para la falla b = 5. Si se instalan cinco de estos componentes en diferentes sistemas, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos aún funcionen al final de ocho años?

31) En la distribución Beta, si a = 2 y b = 3, calcule $P(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4})$.

32) En la distribución Weibull, si a = b = 2, calcule P(X<3).

33) El número de horas de vida útil de una batería XYZ, tiene asociada una función de densidad de probabilidad de la forma $f(x)=\begin{cases}ke^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$.

a) Si se instalan 6 baterías de esta marca, (Tomar x en unidades de 100 horas) ¿Cuál es la probabilidad de que la mitad de las baterías tenga una vida útil menor de 200 o mayor de 300 horas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la quinta batería instalada sea la segunda en durar más de 300 horas?

34) Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad se muestra en el siguiente gráfico. Calcule $P(X\leq 3|X\geq 1)$. (Ver figura 5)

35) Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad se muestra en el siguiente gráfico. Calcule $P\left(X\leq \frac{3a}{2}\middle|X\geq \frac{a}{2}\right)$. (Ver figura 6)

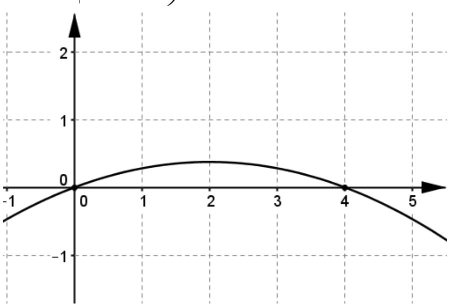

Figura 5

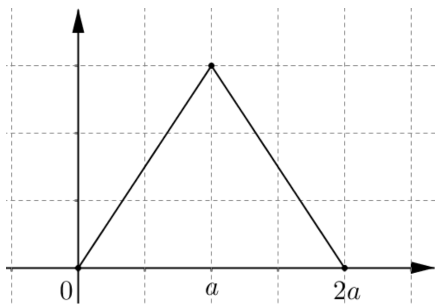

Figura 6

3. Variables Conjuntas

3.1 Variables conjuntas discretas:

Definición: Sean X y Y dos variables aleatorias discretas en el espacio muestral S de un experimento. La función de probabilidad de masa conjunta p(x,y) está definida para cada par de números (x,y) por p(x,y) = P(X=x, Y=y), y satisface las siguientes condiciones:

a) $p(x,y) \geq 0$ para toda (x,y).

b) $\sum_{x}\sum_{y} p(x,y) = 1$.

c) Sea A cualquier conjunto de pares (x,y), entonces la probabilidad $P[(X,Y) \in A]$ se obtiene al sumar la probabilidad conjunta sobre los pares de A, es decir: $P[(X,Y) \in A] = \sum\sum_{(x,y) \in A} P(x,y)$.

Distribuciones Marginales o Incondicionales: Las funciones de probabilidad de masa marginal de X y de Y, denotadas por $p_y(x)$ y $p_x(y)$, respectivamente, están dadas por: $p_y(x) = \sum_{y} P(x,y)$ y $p_x(y) = \sum_{x} P(x,y)$.

Distribuciones Condicionales: Sean X y Y variables aleatorias discretas, y p(x,y) la distribución de probabilidad conjunta, entonces, las distribuciones condicionales se definen como: $P(X = x | Y = y_0) = \dfrac{P(x, y_0)}{P_x(y_0)}$ y $P(Y = y | X = x_0) = \dfrac{P(x_0, y)}{P_y(x_0)}$.

3.2 Variables conjuntas continuas

Definición: f(x,y) es una función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias conjuntas X y Y si:

1) $f(x,y) \geq 0$, para toda (x,y)

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

3) $P[(X,Y) \in A] = \iint_{A} f(x,y)\,dx\,dy$; $A \subseteq R^2$.

Definición: Sea f(x,y) una función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias conjuntas X y Y, entonces, las distribuciones marginales de las variables X y Y se definen como:

1) $f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

2) $f_X(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

Definición: Sea f(x,y) una función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias conjuntas X y Y, entonces, las distribuciones condicionales se definen como:

1) $f(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(y)}$, $f_X(y) > 0$.

2) $f(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(y)}$, $f_X(y) > 0$.

Ejercicios Propuestos

1) Determine el valor de c tal que las siguientes funciones representen distribuciones de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y.
   a) $f(x,y) = cxy$, $x = 1, 2, 3$; $y = 1, 2, 3$.
   b) $f(x,y) = c|x - y|$

2) Si la distribución de probabilidad conjunta de X y Y está dada por $f(x,y)=(x+y)/30$, para $x = 0, 1, 2, 3$; $y = 0, 1, 2$.
   a) Hallar $P(X \leq 2, Y=1)$.
   b) Calcule $P(X>Y)$.
   c) Calcule $P(X>2, Y \leq 1)$.
   d) Calcule $P(X+Y = 4)$

3) Considere el experimento de lanzar un par de dados. Sea X el resultado obtenido en el dado A, y Y el resultado obtenido en el dado B.
   a) Hallar la distribución de probabilidad conjunta $P(x,y)$.
   b) Hallar las distribuciones marginales $P_y(x)$ y $P_x(y)$.
   c) Hallar las distribuciones condicionales $P(x|y)$ y $P(y|x)$.

4) Un camión de entregas especiales viaja de A hasta B y se regresa por la misma ruta, diariamente. Hay tres semáforos en la ruta. Sea X el número de semáforos rojos en el viaje de A hasta B, y sea Y el número de semáforos en rojo en el viaje de B hasta A. Supóngase que la tabla de probabilidad conjunta es:

P(x,y)		**Y**			
		0	**1**	**2**	**3**
X	**0**	0,01	0,02	0,07	0,01
	1	0,03	0,06	0,10	0,06
	2	0,05	0,12	0,15	0,08
	3	0,02	0,09	0,08	0,05

   a) Calcule la distribución marginal $P_X(y)$.
   b) Dado que el camión encuentra 2 semáforos rojos en el viaje de A hasta B, calcule la distribución de probabilidad de y.

5) Una compañía ofrece dos seguros a sus clientes: seguro de automóvil y seguro de vivienda. Las pólizas para seguro de automóvil son de \$ 100, \$ 200 y \$ 300; mientras que las pólizas para seguro de vivienda son de \$ 50, \$ 150 y \$ 250. Sea X la cantidad pagada por la póliza de automóvil, y Y la cantidad pagada por la póliza de vivienda. La siguiente tabla muestra la cantidad de personas en los diferentes pares de seguros.

(x,y)		**Y**		
		50	**150**	**250**
X	**100**	30	40	50
	200	60	20	20
	300	60	40	80

   a) Hallar la tabla de probabilidad conjunta.
   b) Hallar las distribuciones marginales $P_X(x)$ y $P_Y(y)$.

6) En la sala de emergencia de un hospital los casos más comunes comprenden ataques coronarios y heridas graves. Defina X como el número de casos coronarios, Y como el número de traumas por heridas, que llegan en una noche entre semana. Supóngase que la función de probabilidad es $P(x,y) = \dfrac{(x+1)(y+2)}{84}$, para x = 0, 1, 2; y = 0, 1, 2, 3.
   a) Obtener la tabla de P(x,y).
   b) Obtener las probabilidades marginales.

7) Sea p(x,y) una función de probabilidad conjunta aplicable a un sistema de fabricación flexible, donde X = 1, 2, 3 y 4; Y = 0, 1, 2 y 3. Sea X el número de máquinas disponibles, y Y el número de operaciones necesarias para procesar un componente. Supóngase que la tabla para p(x,y) es como sigue:

P(x,y)		**X**			
		1	**2**	**3**	**4**
Y	**0**	0,00	0,10	0,20	0,10
	1	0,03	0,07	0,10	0,05
	2	0,05	0,10	0,05	0,00
	3	0,00	0,10	0,05	0,00

   a) Hallar las distribuciones marginales $P_Y(x)$ y $P_X(y)$.
   b) Hallar la distribución condicional $P(x \mid y = 2)$

8) En un recipiente se encuentran 5 objetos: 3 buenos y 2 defectuosos. Se extraen dos objetos uno tras otro sin reemplazo. Sea X el número de objetos defectuosos en la primera extracción, y Y el número de objetos defectuosos en la segunda extracción.
   a) Hallar la tabla de probabilidad conjunta.
   b) Hallar las distribuciones marginales
   c) Hallar las distribuciones condicionales $P(x \mid y)$ y $P(y \mid x)$.

9) Considere las variables aleatorias X, Y y su distribución conjunta f(x,y) que se muestra en la siguiente tabla:

P(x,y)		**X**		
		0	**1**	**2**
Y	**0**	0,10	0,40	0,10
	1	0,20	0,20	0,00

   a) Hallar $P(X+Y > 1)$
   b) Hallar $P(X+Y = 1)$

10) Se lanza dos veces una moneda. Sea X el número de caras en el primer lanzamiento, y Y el número total de caras en los dos lanzamientos. La moneda está cargada de tal manera que la probabilidad de salir cara es 2/5.
   a) Hallar la distribución de probabilidad conjunta.
   b) Obtener las distribuciones marginales de X y Y.
   c) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos una cara.

11) Considere un experimento que consiste en dos lanzamientos de un dado balanceado. Sea X es el número de cuatros, y Y es el número de cincos, que se obtienen en dos lanzamientos del dado.
   a) Hallar P(x,y).
   b) Hallar $P[(X,Y)\in A]$, donde $A = \{ (x,y) \mid 2X + Y < 3 \}$.

12) Un almacén tiene en existencia 30 componentes de cierto tipo, 8 de los cuales fueron proporcionados por el proveedor 1, 10 por el proveedor 2 y 12 por el proveedor 3. Se van a seleccionar al azar 6 componentes para un conjunto en particular. Sea X el número de componentes seleccionados del proveedor 1, Y el número de componentes seleccionados del proveedor 2. Obtener la función de probabilidad conjunta P(X,Y).

13) En una gasolinera hay "posiciones" de autoservicio y de servicio completo. En cada posición hay una sola bomba de gasolina sin plomo con dos mangueras. Definamos a X como el número de mangueras empleadas en la posición de autoservicio en una hora particular, y definamos a Y como el número de mangueras en la posición de servicio completo en uso en el mismo momento. La función de probabilidad conjunta de X y Y aparece en la siguiente tabla:

P(x,y)		**Y**		
		0	**1**	**2**
X	**0**	0,10	0,04	0,02
	1	0,08	0,20	0,06
	2	0,06	0,14	0,30

a) Hallar P(X=1, Y=1)
b) Calcule P(X≤1, Y≤1)
c) ¿Qué significa el evento (x≠0, Y≠0)?. Calcule la probabilidad de este evento.
d) Calcule la probabilidades marginales de X y calcule P(X≤1).

14) Se sacan 3 cartas sin reemplazo de las 12 cartas de figuras (J, Q, K) de una baraja normal de 52 cartas. Sea X el número de K´s, y Y el números de J´s.
a) Hallar la distribución de probabilidad conjunta de X y Y.
b) Calcular P[(X,Y)∈A], donde A = { (x,y) | X + Y > 1 }

15) Se seleccionan 3 repuestos para un bolígrafo de una caja que contiene 4 repuestos azules, 3 rojos y 4 verdes. Supóngase que X representa el número de repuestos azules, y Y el número de repuestos rojos.
a) Hallar f(x,y).
b) Hallar P[(X,Y)∈A], donde A = { (x,y) : x + y ≤ 2 }.
c) Hallar las distribuciones $P_Y(x)$ y $P_X(y)$.
d) Calcule P(Y = 1 | X = 2).

16) Sea X el número de caras, y Y el número de caras menos el número de sellos, cuando se lanzan 3 monedas.
a) Hallar P(x,y).
b) Hallar $P_Y(x)$ y $P_X(y)$.

17) Se quiere conformar una brigada de salud de 10 profesionales para atender una emergencia en una población que sufrió las inundaciones de dos ríos que la atraviesan. La secretaría de salud de la región dispone de 12 médicos, 15 enfermeras, 6 gastroenterólogos y 7 epidemiólogos. Se define X como el número de médicos en la brigada, y Y como el número de enfermeras en la brigada.

a) Hallar la función f(x,y) de probabilidad conjunta.

b) Obtener la tabla de probabilidad conjunta.

c) Calcular P(X= 3, Y = 4).

d) Calcular P(X = Y).

e) Calcular $P(X > Y)$.

f) Calcular $P(X = Y + 2)$

g) Calcular $P(X + Y < 8)$

h) Calcular $P[(X,Y) \in A]$, donde $A = \{ (x,y) : X = 2Y \}$

18) Cierto supermercado tiene una caja de salida común y una caja rápida. Denote por X el número de clientes que están en espera en la caja común en un momento particular del día, y por Y el número de clientes en la caja rápida al mismo tiempo. Suponga que la función de probabilidad conjunta de X y Y es como se indica en la tabla siguiente:

P(x,y)		**Y**			
		0	**1**	**2**	**3**
X	**0**	0.08	0.07	0.04	0.00
	1	0.06	0.15	0.05	0.04
	2	0.05	0.04	0.10	0.06
	3	0.00	0.03	0.04	0.07
	4	0.00	0.01	0.05	0.06

a) Calcule $P(X = 1, Y = 1)$
b) Calcule $P(X = Y)$
c) Denote por A el evento de que haya por lo menos dos clientes más en una línea de espera que en la otra. Exprese A en términos de X y Y y calcule la probabilidad de este evento.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número total de clientes de las dos líneas de espera sea exactamente cuatro? ¿Y por lo menos de cuatro?

19) Una urna contiene 4 bolas; dos numeradas con el 1 y dos numeradas con el 2. Se seleccionan dos bolas sin reposición. Sea X el menor de los números seleccionados y Y el mayor de los números seleccionados.
a) Determine la función de probabilidad conjunta.
b) Determine la marginal de Y.

20) En un grupo de 9 ejecutivos de una empresa hay 4 que son casados, 3 solteros y 2 divorciados. Se deben seleccionar 3 ejecutivos para una promoción. Sea X el número de ejecutivos casados y Y el de solteros entre los tres seleccionados. Suponer que los tres se seleccionan al azar de entre los 9 disponibles para calcular la distribución de probabilidad conjunta para X y Y.

21) Una urna contiene 6 bolas; tres numeradas con el 2 y tres numeradas con el 4. Se seleccionan dos bolas sin reposición. Sea X el menor de los números seleccionados y Y el mayor de los números seleccionados.
a) Determine la función de probabilidad conjunta.
b) Determine la marginal de Y.

22) Se lanza dos veces un dado. Sea X la cantidad de números pares en el primer lanzamiento, y Y la cantidad de números pares en los dos lanzamientos. El dado está cargado de tal manera que la probabilidad de salir Par es 1/3.
d) Hallar la distribución de probabilidad conjunta.
e) Obtener las distribuciones marginales de X y Y.
f) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos un Par.

23) De una baraja de 52 cartas se extraen 5 cartas, una tras otra sin reposición, y se va anotando el valor de la carta. Sea X la cantidad de Ases acumulados al finalizar la tercera extracción, y Y la cantidad de Ases acumulados al finalizar la quinta extracción. Elabore las tablas de frecuencias absolutas y relativas en donde se clasifiquen los posibles resultados de las cinco extracciones de acuerdo a las variables X y Y.

24) Se sacan simultáneamente 4 cartas de las 16 cartas de las letras J, Q, K y A, que tiene una baraja de 52 cartas. Sea X el número de Jotas, y Y el números de Ases que resultan en la muestra seleccionada. Elabore las tablas de frecuencias absolutas y relativas en donde se clasifiquen las posibles muestras resultantes de acuerdo a las variables X y Y.

25) De una baraja de 52 cartas se seleccionan simultáneamente 5 cartas, se anota valor y palo de las cartas seleccionadas, y no se reponen. Luego se seleccionan simultáneamente otras tres cartas de las 47 cartas restantes, se anota valor y palo de las cartas seleccionadas, y no se reponen. Sea X la cantidad de cartas de tréboles en la primera selección, y Y la cantidad de cartas de tréboles en la segunda selección. Elabore las tablas de frecuencias absolutas y relativas en donde se clasifiquen los posibles resultados de las dos selecciones hechas de acuerdo a las variables X y Y.

26) Una fábrica de chocolates distribuye cajas de crema de chocolate con dos tipos de chocolate: claro y oscuro. Sea X la proporción de chocolate claro en una caja, y Y la proporción de chocolate oscuro en una caja. Si se define la función de densidad conjunta como

$$f(x,y)=\begin{cases} k(4x+3y), & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & , \text{ en los demás puntos.} \end{cases}$$

a) Hallar para que f(x,y) sea función de probabilidad.

b) Calcular $P\left(0<x<\frac{1}{2}, \frac{1}{4}<y<\frac{1}{2}\right)$

27) Dada la función de densidad conjunta $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(1+3y^2)}{4}, & 0<x<2,\ 0<y<1 \\ 0 & , \text{ en otros puntos} \end{cases}$

a) Hallar $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

b) Hallar f(xly) y f(ylx).

c) Calcule $P\left(\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\middle| y=\frac{1}{3}\right)$

d) Calcule $P\left(x<\frac{1}{2}\middle| y>\frac{1}{3}\right)$

28) Una productora de granola produce bolsas de 1 libra que contienen avena, nueces y otros ingredientes. Sea X el peso aportado por la avena, y Y el peso aportado por las nueces, en una bolsa. Suponga que la cantidad de avena y de nueces en una bolsa es aleatoria y que la función de densidad es f(x,y) = 24xy, para $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le x+y \le 1$.

a) Calcule $p(x+y \le 0.5)$.

b) Hallar $f_X(x)$ y $f(_Y(y)$.

29) Sean X y Y la duración en años de dos componentes en un sistema electrónico. Supóngase que la función de densidad de probabilidad conjunta tiene la forma $f(x,y) = ke^{-(x+y)}$, para $x>0$, $y>0$.

a) Calcule $P(x+y<2)$

b) Calcule $P(1 < x+y < 2)$

c) Calcule $P(x+y > 2)$

d) Hallar $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

e) Hallar f(xly) y f(ylx).

f) Calcule $P(0<x<1 \mid y=2)$

g) ¿X y Y son estadísticamente independientes?

30) Sean X y Y variables aleatorias continuas y $f(x,y) = 4xy$ una función de densidad para X y Y, donde $0<x<1$, $0<y<1$.

a) Calcular $P(x<y)$
b) Calcular $P(y<x)$
c) Calcular $P(0.5<x+y<1.0)$
d) ¿X y Y son estadísticamente independientes?

31) Si la función de distribución conjunta (acumulada) de las variables X y Y está dada por $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}) & \text{para } x>0 \text{ y } y>0\\ 0 & \text{en otros puntos}\end{cases}$. Calcule $P(1<X<3,\ 1<Y<2)$.

32) Sea X, Y dos variables aleatorias continuas con función de densidad definida como

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & (x,y)\in[0,1]x[0,1]\\ 0, & (x,y)\in[0,1]x[0,1]\end{cases}.$$

a) Hallar las marginales $f(x|y)$ y $f(y|x)$.
b) Calcular $P(X>1/4 \mid Y<1/2)$

33) Si X y Y tienen función de densidad conjunta $f(x,y)=\begin{cases}2, \text{ si } 0<x<y, & 0<y<1\\ 0, \text{ otros puestos}\end{cases}$

a) Determine las distribuciones marginales de X e Y.
b) Determine la $P(Y|X)$
c) Determine si son independientes X e Y.

34) Si la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y está dada por $f(x,y)=\begin{cases}x+y & \text{para } 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0 & \text{en cualquier otra parte}\end{cases}$. Determine la función de distribución conjunta acumulada $F(x,y)$.

35) Una fábrica de pintura vende tanques cilíndricos de pintura de 5 litros. Para sacar matices de grises se mezcla una cantidad de pintura blanca con una cantidad de pintura negra y cierta cantidad de disolvente; la cantidad de pintura de cada color es aleatoria. Sean X la cantidad de pintura blanca y Y la cantidad de pintura negra, que se colocan en la mezcla. Si la probabilidad de que en un tanque se mezcle X cantidad de pintura blanca con Y cantidad de pintura negra es directamente proporcional al producto de estas cantidades, entonces:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, en un tanque, la cantidad de pintura blanca más la cantidad de pintura negra no supere los 4 litros?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en un tanque, la cantidad de pintura blanca más la cantidad de pintura negra supere los 2 litros pero no supere los 4 litros?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que, en un tanque, la cantidad de pintura blanca más la cantidad de pintura negra sea exactamente de 4.5 litros?