PROBABILIDADES
GUIA No 2

ANÁLISIS COMBINATORIO

1. Principios Combinatorios

El análisis combinatorio cuenta con unos principios que fundamentan la mayoría de técnicas combinatorias de conteo. En este capítulo se describen los siguientes principios: adición, multiplicación, correspondencia, Dirichlet, inclusión y exclusión y del complementario. Además, se ilustran las principales técnicas de conteo conocidas como permutaciones, variaciones y combinaciones, a través de la solución de diversos ejemplos de problemas como los de averiguar cuántos números diferentes de teléfonos, placas, loterías, juegos de azar, etc. se pueden formar utilizando un conjunto dado de letras y/o dígitos.

1.1 Principio de adición

Suponga que un procedimiento A se puede hacer de m maneras, que un segundo procedimiento B se puede hacer de n maneras, y que la realización de estos procedimientos es mutuamente excluyente. Entonces, el número de maneras como se puede hacer A o B es (m+n) maneras.
En términos de conjuntos y extendiendo este principio a n procedimientos el principio de enuncia así:
Si A_1, A_2, A_3, . . . , A_n son conjuntos finitos no vacíos y mutuamente excluyentes o disyuntos, entonces $\left|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| + \left|A_3\right| + ... + \left|A_n\right|$.

1.2 Principio de multiplicación

También se conoce como el **principio fundamental del conteo**. Si una operación se puede ejecutar de n_1 maneras, y si para cada una de estas ejecuciones se puede llevar a cabo una segunda operación de n_2 formas, y si para cada una de las dos primeras operaciones se puede realizar una tercera operación de n_3 formas, y así sucesivamente, entonces, la serie de k operaciones se puede realizar de n_1 x n_2 x n_3 x...x n_k formas.
Este principio, en términos de conjuntos, relaciona el cardinal de un producto cartesiano con el producto de los cardinales de los conjuntos que conforman dicho producto. En términos matemáticos se enuncia así:
Si A_1, A_2, A_3, . . . , A_n son conjuntos finitos no vacíos, entonces $\left|A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n\right| = \left|A_1\right| \times \left|A_2\right| \times \left|A_3\right| \times ... \times \left|A_n\right|$.

1.3 Principio de correspondencia

Dos conjuntos finitos cuyos elementos pueden ponerse en correspondencia uno-uno, son del mismo tamaño. Cuando tenemos que calcular el tamaño de un conjunto, podemos encontrar otro de su mismo tamaño más fácil de medir.

1.4 Principio de Dirichlet (Palomar o Cajas)

Este principio también es conocido como 'Principio del Palomar' o de 'Las cajas' y se enuncia de la siguiente manera: si hay (n+1) palomas (objetos) y n palomares (cajas), entonces algún palomar (caja) contendrá más de una paloma (objeto). En términos más generales el principio se puede enunciar así: si se colocan n objetos en m cajas, alguna caja tiene más de [n/m] elementos, y existe alguna caja con a lo sumo [n/m] elementos, en donde la notación de paréntesis angulares denota la parte entera del cociente n/m. Este principio es más usado para justificar proposiciones que para hacer conteos.

1.5 Principio de inclusión y exclusión ó Criba

Básicamente es un principio útil para contar la cantidad de elementos que hay en la unión de varios conjunto y no cometer el error de repetir elementos comunes.

Para 2 conjuntos finitos se define de la siguiente manera: Si A y B son conjuntos finitos, entonces: $\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right|$.

Para 3 conjuntos finitos se define de la siguiente manera: Si A, B y C son conjuntos finitos, entonces:
$\left|A \cup B \cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A \cap B\right| - \left|A \cap C\right| - \left|B \cap C\right| + \left|A \cap B \cap C\right|$.

Para n conjuntos finitos se define de la siguiente manera:
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos, y $a_1 = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| + \ldots + \left|A_n\right|$,
$a_2 = \left|A_1 \cap A_2\right| + \left|A_1 \cap A_3\right| + \ldots + \left|A_{n-1} \cap A_n\right|$,
$a_3 = \left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right| + \left|A_1 \cap A_2 \cap A_4\right| + \ldots + \left|A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n\right|$,
. . .
$A_n = \left|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n\right|$, entonces:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n\right| = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k .$$

1.6 Principio del complementario

Si X es un conjunto finito con n elementos, $Y \subset X$ con m elementos, entonces $\left|X - Y\right| = \left|X\right| - \left|Y\right| = n - m$.

2. Técnicas de Conteo

Las técnicas de conteo son las diferentes reglas que permiten contar de manera abreviada la cantidad de elementos que tiene un conjunto. En estas reglas aparecen con frecuencia los números factoriales y los números combinatorios o coeficientes binomiales. Las técnicas de conteo son útiles para contar las configuraciones de los elementos de un conjunto, estas configuraciones pueden ser permutaciones, variaciones o combinaciones.

2.1 Números combinatorios

Factorial de n. El número factorial de n, simbolizado como n! se define como el producto de los enteros positivos que son menores o iguales a n, y se simboliza n! = nx(n-1)x(n-2)x(n-3)x(n-4)x…x3x2x1. Además, se define 0! = 1.

Coeficiente binomial. Este coeficiente se define como $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $(n \geq k \geq 0)$.

El coeficiente binomial, también se suele representar como C_k^n y debido a los múltiples contextos en que aparece se puede interpretar de varias maneras diferentes, que se describen a continuación.

a) Interpretación conjuntista: C_k^n representa la cantidad de subconjuntos de tamaño k que se pueden formar con los elementos de un conjunto de tamaño n.

b) Interpretación aritmética: C_k^n es el número que resulta de realizar las operaciones $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

c) Interpretación algebraica: $C_k^n = \binom{n}{k}$ se puede interpretar como el coeficiente de $x^k y^{n-k}$ en el desarrollo de $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

d) Interpretación geométrica: En una cuadrícula de n–k filas por k columnas, C_k^n representa la cantidad de caminos ascendentes desde (0, 0) hasta (n–k, k).

El coeficiente binomial satisface las siguientes propiedades:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

c) $\sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{k}$

d) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \ldots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}$

Coeficiente multinomial. Para los enteros positivos n, k, el coeficiente de $x_1^{n1} \times x_2^{n2} \times x_3^{n3} \ldots x_k^{nk}$ en el desarrollo de $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k)^n$ es $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$ donde cada n_i es un entero con $0 \le n_i \le n$, para toda $1 \le i \le k$ y $n_1+n_1+n_1+\ldots+n_k=n$. El número $C\binom{n}{n_1, n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$ se llama coeficiente multinomial.

El coeficiente multinomial representa la cantidad de sucesiones de n objetos de k tipos diferentes, donde hay n_1 de tipo 1, n_2 de tipo 2, . . . , n_k de un tipo k.

Coeficiente binomial generalizado. Si m es un número real cualquiera y k es un entero mayor o igual a cero, entonces $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-(k-1))}{k!}$. Esta regla nos permite calcular los números $\binom{1/3}{5}$, $\binom{1/2}{6}$, $\binom{-3}{5}$, $\binom{-1/4}{3}$, etc.

2.2 Permutaciones

Caso 1. Permutación de n elementos diferentes

Permutar significa variar el orden que tienen dos o más objetos. Las permutaciones son los diferentes arreglos que pueden formarse con los n elementos de un conjunto, de tal modo que dos arreglos difirieren entre sí porque sus elementos están en distinto orden. El número de permutaciones de n objetos distintos es $P_n = n!$

Caso 2. Permutación circular

Son los diferentes arreglos o grupos que pueden formarse con los elementos de un conjunto alrededor de un círculo, de tal modo que dos arreglos difirieren entre sí porque sus elementos están en distinto orden. Para contar las posibles permutaciones circulares de n objetos basta con fijar un objeto y permutar los n-1 objetos restantes como si formaran una fila. Entonces, el número de permutaciones de n objetos distintos agregados en un círculo es igual $C_n = (n - 1)!$

Caso 3. Permutación con repeticiones

Supóngase que un conjunto tiene n_1 elementos iguales, n_2 elementos iguales, n_3 elementos iguales, . . . , n_k elementos iguales, y que $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$. Entonces, las permutaciones con repeticiones son los diferentes grupos o arreglos que pueden formarse con los n elementos del conjunto, de tal manera que dos arreglos difieren entre sí porque sus elementos están en distinto orden.

El número de permutaciones de n objetos, de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales, . . . , n_k son iguales, es igual a $P\begin{pmatrix} n \\ n_1, n_2, \ldots, n_k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

También se puede enunciar de la siguiente forma: El número de permutaciones diferentes de n objetos, de los cuales n_1 son de tipo 1, n_2 son de tipo 2, . . . , y n_k son de tipo k, está dado por el coeficiente multinomial $P\begin{pmatrix} n \\ n_1, n_2, \ldots, n_k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Caso 4. Desarreglos

Un desarreglo o desorden de n objetos, es una permutación de los n objetos tal que ninguno de ellos queda colocado en su posición original. El número total de desarreglos con n objetos es $D_n = n!\left(1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{1}{n!}\right)$.

2.3 Variaciones

Caso 1. Variaciones sin repeticiones

Son los diferentes arreglos que pueden formarse con los n elementos de un conjunto, tomados de k en k, de tal modo que dos arreglos difieren entre sí porque contienen elementos diferentes o sus elementos están en distinto orden. A estas configuraciones también se les llama k-permutación y se denotan por ${}_nP_k$, $P(n,k)$ o V_k^n. El número de variaciones sin repeticiones que se pueden formar de un conjunto de n elementos tomando k elementos es

$$V_k^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Obsérvese que en las permutaciones de n objetos diferentes se involucran siempre los n objetos, mientras que en las variaciones se toman k objetos $(k \le n)$ y luego se permutan estos k objetos. También se puede ver en la fórmula que para contar la cantidad de variaciones se puede usar el principio de multiplicación.

Caso 2. Variaciones con repeticiones

Este tipo de variaciones se generan con los diferentes arreglos que pueden formarse con los n elementos de un conjunto, tomados de k en k, en los que pueden aparecer elementos repetidos, de tal modo que dos arreglos difieren entre sí porque contienen elementos diferentes o sus elementos están en distinto orden. El número de variaciones de este tipo es $VR(n,k) = VR_k^n = n^k$. El número n^k indica que se realizarán k elecciones y para cada elección hay n opciones.

2.4 Combinaciones

Caso 1. Combinaciones sin repeticiones

Son los diferentes grupos que pueden formarse con los n elementos de un conjunto, tomados de k en k, de tal manera que dos grupos difieren entre sí cuando tienen al menos un elemento distinto. No se tiene en cuenta el orden. Es decir, una combinación de tamaño k tomada de un conjunto de n elementos es cualquier subconjunto que tenga k elementos.

El número de combinaciones de k objetos distintos tomados de un conjunto de n objetos distintos es igual a $_nC_k$ = $C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Caso 2. Reparticiones

Sea A un conjunto con n elementos, y sean $n_1, n_2, ..., n_k$ enteros positivos tales que $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, entonces el número de reparticiones ordenadas diferentes de A de la forma $(A_1, A_2, ..., A_k)$, donde A_1 contiene n_1 elementos, A_2 contiene n_2 elementos, . . . y A_k contiene n_k elementos, está dada por el coeficiente multinomial:

$$C\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}.$$

Caso 3. Combinaciones con repeticiones

Son los diferentes grupos que se pueden formar con los n elementos de un conjunto, tomados de k en k, en los que pueden aparecer elementos repetidos, de tal manera que dos grupos difieren entre sí cuando tienen al menos un elemento distinto.

El número de combinaciones de k objetos, con repeticiones, tomados de un conjunto de n objetos es igual a $CR_k^n = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k}$.

Una combinación con repeticiones se puede describir como la selección de x_i objetos de tipo i, (i=1, 2, 3,…, n), donde cada x_i es un entero no negativo y $x_1+x_2+\ldots+x_n = k$. Es decir, cada combinación con repeticiones de orden k, se corresponde con una solución entera no negativa de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.

También se puede decir que, si se quiere conocer la cantidad de soluciones que tiene el problema de hallar n números enteros no negativos cuya suma sea k, esa cantidad es $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k}$.

2.5 Fórmula para Sumas.

Algunas fórmulas para sumas que son útiles para hacer conteos son las siguientes:

a) Suma de los n primeros enteros positivos: $1+2+3+...+n = \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

b) Suma de los n primeros cuadrados: $1+4+9+...+n^2 = \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) Suma de los n primeros cubos: $1+8+27+...+n^3 = \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

d) Suma geométrica: $1+x+x^2+...+x^{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$.

Ejercicios Propuestos

1) En una fábrica de lápices, estos se clasifican como lápices de mala calidad, de regular calidad y de buena calidad. Un experimento consiste en sacar un lápiz aleatoriamente y anotar su calidad. Un proceso consiste en realizar el experimento 5 veces. ¿Cuál es el tamaño del espacio muestral de este proceso?

2) Supóngase que las placas de camiones en un país deben tener tres letras seguidas de 4 dígitos. Las letras sólo pueden ser vocales, el primer dígito debe ser par mayor que cero, el segundo dígito debe ser impar y los dos últimos dígitos no tienen restricción. Bajo estas condiciones, ¿Cuál es el máximo número de camiones que puede tener ese país?

3) ¿Dé cuántas maneras puede una organización, que tiene 20 miembros, elegir presidente, tesorero, secretario y fiscal, teniendo en cuenta que ninguno de sus miembros puede elegirse para dos cargos?

4) Un examen tiene 10 preguntas de selección múltiple, con cinco alternativas cada una. ¿Cuál debe ser el mínimo número de personas que debe contestarlo para el cual puede garantizarse que por lo menos dos de ellas tendrán exactamente las mismas respuestas para todas las preguntas?

5) Existen 5 líneas de transporte ente las ciudades A y B, y 7 líneas de transporte entre las ciudades B y C. ¿De cuántas maneras puede elegir las líneas de transporte una persona que desea viajar desde A hasta C, pasando por B?

6) Suponiendo que no se permiten repeticiones:
   a) ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse con los números 0, 2, 4, 6, 8 y 9?
   b) ¿Cuántos números de tres dígitos y mayores de 400 se pueden formar con los números 2, 3, 5, 6, 7 y 9?
   c) ¿Cuántos números de tres dígitos y múltiplos de 5 se pueden formar con los números 2, 3, 5, 6, 7 y 9?
   d) ¿Cuántos números pares y de tres dígitos pueden formarse con los números 1, 2, 5, 6 y 9?

7) Suponiendo que se permiten repeticiones:
   a) ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse con los dígitos 0, 2, 3, 5, 6, 7 y 9?
   b) ¿Cuántos números de tres dígitos y menores de 400 se pueden formar con los números 2, 3, 5, 6, 7 y 9?
   c) ¿Cuántos números de tres dígitos y múltiplos de 5 se pueden formar con los números 2, 3, 5, 6, 7 y 9?
   d) ¿Cuántos números pares y de tres dígitos pueden formarse con los números 1, 2, 5, 6 y 9?

8) ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un tablero de ajedrez ocho torres distinguibles entre sí de tal modo que no se ataquen?

9) ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un tablero de ajedrez tres torres blancas idénticas, de tal modo que no se ataquen?

10) ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un tablero de ajedrez un alfil blanco y un alfil negro, de tal modo que se ataquen mutuamente?

11) ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un tablero de ajedrez un alfil blanco y un alfil negro, de tal modo que no se ataquen?

12) Consideremos la siguiente situación: 5 cedros y 4 pinos se sembrarán a lo largo de una pared rectilínea.
    a) ¿De cuántas maneras pueden organizarse, si los árboles del mismo tipo deben quedar juntos?
    b) ¿De cuántas maneras pueden organizarse, si los pinos deben quedar juntos?

13) En el alfabeto Morse sólo se usan dos símbolos: Punto y Raya. ¿Cuántos códigos de 5 elementos pueden formarse?

14) ¿Cuántos menús que consisten de sopa, emparedado, postre y un refresco se pueden armar, si se puede seleccionar entre 4 sopas diferentes, 3 clases de emparedado, 5 postres y 4 refrescos?

15) Puede comprarse un medicamento para el tratamiento de una infección ya sea líquido, en tabletas o en cápsulas, a 6 diferentes fabricantes, y todas las presentaciones en concentración baja, regular o alta. ¿De cuántas formas diferentes puede un médico recetar la medicina a un paciente que sufre de dicha infección?

16) Cuatro matrimonios compraron 8 lugares para un concierto. ¿De cuántas maneras pueden organizarse en una fila de 8 puestos:
   a) si se sientan por parejas?
   b) si todos los hombres se sientan juntos y a la derecha de todas las mujeres?

17) ¿Cuántos números enteros positivos se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5, si ningún dígito se puede repetir en un mismo número?

18) ¿Cuántos son los números naturales de cinco cifras diferentes en donde las tres primeras cifras son impares y las dos últimas cifras son pares?

19) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse n objetos diferentes en una fila, si m de ellos no deben quedar juntos? ($m<n$).

20) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse n objetos diferentes en una fila, si 2 específicos de ellos deben quedar separados por dos de los otros?

21) Considere todos los enteros positivos de tres cifras. Con la condición de que las tres cifras sean diferentes, determine:
   a) ¿Cuántos son mayores de 700?
   b) ¿Cuántos son impares?
   c) ¿Cuántos son pares?
   d) ¿Cuántos son divisibles por 5?
   e) ¿Cuántos tienen sólo dígitos pares?
   f) ¿Cuántos tienen sólo dígitos impares?

22) Se lanza una moneda normal 15 veces y se anota la figura resultante en cada lanzamiento (Cara, Sello) formándose una sucesión de Caras y Sellos. ¿En cuántas sucesiones el número de Caras es el doble del número de Sellos?

23) ¿De cuántas maneras se pueden escoger n cartas sucesivas de una baraja de 52 cartas, si cada carta extraída se coloca de nuevo en la baraja antes que se escoja la siguiente carta?

24) Considere la palabra CATARATA.
   a) ¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de CATARATA?
   b) ¿Cuántas de estas palabras comienzan con la letra A?
   c) ¿Cuántas de estas palabras tiene las vocales juntas?
   d) ¿Cuántas de estas palabras comienzan y terminan con A?

25) Justificar la siguiente afirmación: “En un grupo con más de 60 personas, hay al menos 6 que cumplen años en el mismo mes”.

26) Justificar la siguiente afirmación: "Se toman 5 puntos en el interior de un triángulo equilátero de lado 2 cm. Al menos dos de ellos distan entre sí menos de 1 cm.".

27) ¿Cuántos son los números naturales de cinco cifras que no contienen el 0, empiezan por 1 o terminan por 9?

28) ¿Cuántos son los números naturales de cinco cifras diferentes que no contienen el 0, empiezan por 1 o terminan por 9?

29) ¿Cuántos números enteros hay entre 1 y 2000 inclusive, que son divisibles por 2, por 3, por 5 o por 7?

30) En un poblado indígena hay 32 misioneros, cada uno de los cuales ha convertido a 5 indígenas. Además, cada indígena ha sido convertido por 8 misioneros. ¿Cuál es el número de indígenas?

31) ¿Cuántos divisores positivos tiene el número 324.000?

32) Una moneda que no tiene Caras y Sellos sino 4´s y 5´s se lanza 8 veces. ¿En cuántas sucesiones de 4´s y 5´s la suma de los resultados es 35?, ¿En cuántas sucesiones la suma de los resultados es mayor que 35?

33) Supóngase que el mapa de un pueblo es un rectángulo cuadriculado de 8 calles por 6 carreras. Una persona está en el punto A y se va a desplazar hasta el punto B. Si solo se permiten desplazamientos hacia arriba y hacia la derecha, ¿Cuántas trayectorias distintas existen para desplazarse desde A hasta B? (Ver figura 1)

34) Alrededor de un parque rectangular se han demarcado 8 zonas de parqueo, sobre cada borde se pueden parquear 5 vehículos y en cada esquina sólo se puede parquear una motocicleta. Cada zona tiene un número de 1 a 24. ¿De cuántas maneras se pueden organizar 5 busetas, 5 monteros, 5 camionetas, 5 automóviles y 4 motocicletas alrededor del parque, si los vehículos grandes del mismo tipo deben quedar juntos? (Ver figura 2)

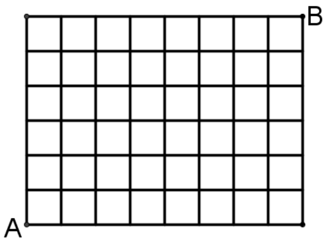

Figura 1.

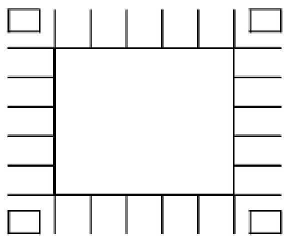

Figura 2.

35) La figura 3 es el plano de una casa que tiene cuatro habitaciones. Se deben pintar las habitaciones de tal manera que las habitaciones que están conectadas por una puerta tengan colores diferentes. ¿De cuántas maneras pueden pintarse si se dispone de 10 colores?

36) Supóngase que el rectángulo de la figura 4 es el mapa de un pueblo, donde las líneas representan las calles. Una persona debe viajar del punto A al punto C, pero debe pasar por el punto B a recoger una mercancía. ¿De cuántas maneras puede elegirse la ruta del viaje, si solo se permiten desplazamiento hacia la derecha y hacia arriba?

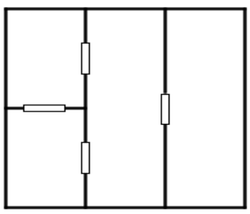

Figura 3.

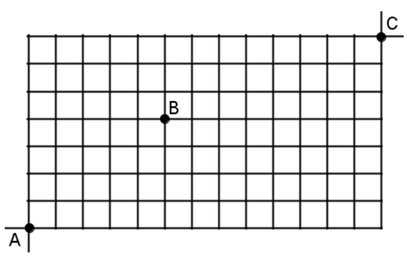

Figura 4.

37) En el sistema de numeración base 3, ¿En cuántos números de 8 cifras aparecen exactamente 3 ceros?

38) ¿De cuantas maneras se pueden organizar en una fila m colombianos, n españoles, p argentinos y q venezolanos, de tal manera que todos los ciudadanos de igual nacionalidad queden juntos?

39) ¿De cuántas formas diferentes pueden acomodarse m focos rojos, n focos amarillos y k focos azules en un árbol de navidad con (m + n + k) receptáculos?

40) ¿Cuántas señales diferentes, cada una consistente de 12 bombillas colocadas en una tablilla vertical, pueden formarse de un conjunto de tres bombillas rojas idénticas, cuatro bombillas blancas idénticas y cinco bombillas azules?

41) ¿De cuántas formas pueden plantarse, a lo largo de una línea divisoria de una propiedad, 6 robles, 5 pinos y 4 arces, si no se distingue entre los árboles de la misma clase?

42) Un grupo de 7 personas A, B, C, D, E, F y G se deben organizar para participar en un concurso de oratoria donde cada uno tendrá una sola oportunidad de hablar. ¿De cuántas maneras pueden organizarse de tal manera que F no hable antes que A?

43) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden acomodar en una estantería circular 5 discos compactos de The Beatles, 6 de Rollings Stones, 4 de Queen, 5 de los Bee Gees y 3 de The Police, de tal manera que los 6 discos de Rollings Stones no queden juntos?

44) ¿De cuantas maneras se pueden organizar alrededor de una mesa redonda 4 colombianos, 4 argentinos, 3 españoles y 2 venezolanos, si los ciudadanos de igual nacionalidad deben quedar juntos?

45) En un campeonato de ajedrez asisten 10 ajedrecistas clasificados por la Federación Internacional de Ajedrez FIDE. ¿Cuántas partidas se deben programar, si todos juegan contra todos, dos partidas (una con fichas blancas y una con fichas negras)?

46) En un campeonato de béisbol, todos los equipos jugarán contra todos, un partido como local y uno como visitante. En total se jugarán 72 partidos. ¿Cuántos equipos participan en el campeonato?

47) Una empresa multinacional establecida en Colombia decide contratar a dos expertos para llenar los cargos de jefe de ventas y jefe financiero. El gerente decide que los cargos deben ser ocupados por dos colombianos o por dos extranjeros. Después de contar las hojas de vida y de contar todas las posibles formas de armar la pareja de expertos, encontró que las hojas de vida de colombianos duplican la cantidad de hojas de vida de extranjeros y con los colombianos se pueden armar 50 parejas más que el doble de parejas que se pueden armar con los extranjeros. ¿Cuántas hojas de vida se recibieron en total?

48) ¿Cuántas palabras de 10 letras pueden formarse con las 5 vocales, si la “a” debe aparecer 4 veces y la “o” debe aparecer 3 veces?

49) Coldeportes realizó un campeonato juvenil de atletismo en donde la cantidad de participantes masculinos triplicó la participación femenina. La cantidad de maneras como se pueden asignar las medallas (oro, plata, bronce) a los hombres es 48 maneras por encima de 36 veces las maneras como se pueden asignar las medallas a las mujeres. Plantear una ecuación que permita determinar la cantidad de participantes de cada género.

50) ¿De cuántas maneras puede un juez otorgar el primero, segundo y tercer lugar de un concurso de gimnasia, donde participan 10 personas.

51) En un acto deben hablar m mujeres y n hombres. ¿De cuántas maneras se puede ordenar la lista de oradores con la condición de que no hablen dos mujeres consecutivamente?

52) ¿Cuántos números positivos menores que 10.000 pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7?

53) Siete beisbolistas llegan a un almacén a comprar implementos deportivos, donde cada uno puede escoger entre un bate, una pelota, una manilla o un casco. ¿Cuántas compras diferentes pueden hacer?

54) ¿Cuántos rectángulos hay en un tablero de ajedrez?

55) ¿Cuántos colores diferentes pueden obtenerse mezclando 3 tarros de pintura, si disponemos de 7 tarros de colores diferentes?

56) Si A = {0, 1, 2, 3} y B = {4, 5, 6, 7, 8, 9}, (a) ¿Cuántas funciones se pueden formar de A en B? (b) ¿Cuántas funciones se pueden formar de B en A?

57) Demuestre que la cantidad de maneras como pueden desordenarse los n primeros enteros positivos es $D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$.

58) Para la organización de un coloquio se escriben n cartas de invitación a n académicos, las cuales se deben meter en n sobres marcados con sus nombres. La persona encargada de organizar esta correspondencia decide meter las cartas al azar en los sobres. ¿De cuántas maneras se pueden meter las cartas en los sobres, de tal forma que al menos la mitad de las cartas queden en el sobre correcto?

59) Demuestre que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

60) Demuestre que $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.

61) Demuestre que $\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} - \ldots + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

62) Demuestre que $\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1}\binom{m}{2}\binom{n}{k-2} + \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}$

63) Calcule la suma $1\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \ldots + (k+1)\binom{n}{k} + \ldots + (n+1)\binom{n}{n}$.

64) Calcular los siguientes números:

a) $\binom{2.5}{5}$ b) $\binom{7.5}{5}$ c) $\binom{-2.5}{5}$ d) $\binom{-\sqrt{5}}{5}$

65) Un niño tiene una moneda de 50 pesos, una moneda de 100 pesos, una moneda de 200 pesos, una moneda de 500 pesos y una moneda de 1000 pesos. Si entra a un supermercado, ¿Cuál es el número total de precios que puede pagar usando una o más monedas?

66) En un plano se trazan m segmentos que son paralelos entre sí, luego se trazan n segmentos paralelos entre sí pero no paralelos a los m primeros. Uno de los m primeros segmentos se intersecta con uno de los n segundos segmentos en un punto P. ¿Cuántos paralelogramos se pueden trazar de tal manera que el punto P no sea uno de sus vértices?

67) En un plano se trazan m rectas que son paralelas entre sí, y se trazan otras n rectas paralelas entre sí pero no paralelas a las m primeras. ¿Cuántos paralelogramos se pueden trazar?

68) En un examen de 25 preguntas de selección múltiple cada pregunta tiene cuatro opciones de respuesta de las cuales solo una es la correcta. ¿De cuántas maneras se puede responder el examen?

69) Se tienen m recipientes, p esferas rojas y q esferas negras, ($p+q<m$). ¿De cuántas maneras pueden colocarse máximo una esfera en cada recipiente, si:
a) las esferas son indistinguibles?
b) las esferas son distinguibles?

70) ¿De cuántas maneras se puede colocar k esferas distinguibles en n recipientes distinguibles, si no hay límite para la cantidad de esferas que deben colocarse en un recipiente?

71) ¿De cuántas maneras se puede colocar k esferas indistinguibles en n recipientes distinguibles, si no hay límite para la cantidad de esferas que deben colocarse en un recipiente?

72) ¿De cuántas maneras se puede colocar k esferas distinguibles en n recipientes distinguibles, si en cada recipiente puede colocarse máximo una esfera?

73) Un comprador de chatarra dispone de una balanza de platillos y cuatro pesas de 1, 3, 9 y 27 kilos. Para efectuar las pesadas tiene una lista en la que se indican el número de kilos a pesar, las pesas que debe tomar y cómo distribuirlas. ¿Cuántas pesadas distintas puede hacer el comprador?

74) Considere el siguiente experimento: Se sacan tres boletos de la lotería, de un grupo de 40, para el primero, segundo y tercer premios. Encuentre el número de puntos muestrales que tiene el espacio S de este experimento.

75) En una caja hay 10 bolas de billar, 12 bolas de tenis y 15 bolas de golf. Encuentre el número de maneras en que pueden sacarse 9 bolas de la caja, si:
   a) Pueden ser de cualquier tipo.
   b) 3 deben ser de billar, 3 deben ser de golf y 3 deben ser de tenis.
   c) Todas deben ser del mismo tipo.

76) Un estudiante debe responder 10 de 15 preguntas en un examen.
   a) ¿De cuántas maneras puede seleccionar sus preguntas, si debe responder las 5 de las 10 primeras preguntas?
   b) ¿De cuántas puede seleccionar las preguntas, si debe responder por lo menos 5 de las 10 primeras preguntas?

77) Un póker corriente tiene 4 palos o pintas, por cada palo hay 13 valores diferentes {A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K}, 13 corazones, 13 diamantes, 13 picas y 13 tréboles; una mano son 5 carta, una pareja son dos cartas del mismo valor y una terna son tres cartas del mismo valor. Un jugador recibe una mano de póker.
   a) ¿De cuántas maneras puede recibir 5 picas?
   b) ¿De cuántas maneras puede recibir 5 picas, y una de ellas es el A♠?
   c) ¿De cuántas maneras puede recibir 5 cartas del mismo palo?
   d) ¿De cuántas maneras puede recibir 3 Ases con una pareja?
   e) ¿De cuántas maneras puede recibir 3 cartas de un valor y 2 de otro valor?

78) ¿De cuántas maneras puede conformarse un comité que consta de m hombres y n mujeres, a partir de un grupo de 2m hombres y un grupo de 2n mujeres?

79) Supóngase que una tienda de computadores tienen en venta 12 computadores, de los cuales hay 5 defectuosos. Un comprador que no conoce el estado de los equipos elige 6 equipos al azar y los compra, pensando que todos están en perfecto estado. Sea A_k el evento en que el comprador lleve k equipos defectuosos entre los equipos seleccionados. $\{A_k | k=0,1,2,\ldots,5\}$ forma una partición de S. Elabore una tabla de frecuencias relativas para la partición de S.

80) ¿Cuántas letras tendrá una palabra, si sabemos que el número de combinaciones de todas ellas, tomadas dos a dos, es al número de combinaciones, tomadas tres a tres, como tres es a cinco?

81) Un jugador recibe 8 cartas de un póker corriente en el siguiente orden: una terna de un valor, una pareja de un valor diferente a la primera terna, y una terna de un valor diferente a los anteriores. ¿De cuántas maneras puede recibir sus 8 cartas?

82) Anatoly trabaja con 15 ingenieros en una constructora y quiere seleccionar a siete de ellos para adelantar un proyecto urbanístico. ¿De cuántas maneras los puede seleccionar, si:
   a) dos de ellos son hermanos y no participan por separados en los proyectos?
   b) dos de ellos nunca participan juntos en los proyectos?

83) Un grupo de 12 amigos forman un equipo de béisbol y la mayoría de ellos se desempeña bien en cualquier posición. ¿De cuántas maneras se puede hacer la alineación del equipo de nueve jugadores para un partido, si:
   a) Sólo tres de ellos pueden ocupar la posición de pítcher y no se desempeñan en otra posición?
   b) Sólo tres de ellos pueden ocupar la posición de pítcher y además se desempeñan en las otras posiciones?

84) En un sistema de comunicación por señales, las señales tienen la forma de un semáforo vertical de 14 bombillas. El fabricante de dicho sistema dispone de 10 colores diferentes y solo puede usar 4 colores diferentes en cada señal. Dos bombillas deben ser de un color, tres de otro color, cuatro de otro color y cinco de otro color. ¿Cuántas señales diferentes se pueden fabricar?

85) Un grupo de 12 personas se debe repartir en dos grupos para realizar dos trabajos, llegan a una sala donde se encuentran dos mesas, una redonda y otra rectangular, cada una con 8 puestos. ¿De cuántas maneras se pueden organizar las 12 personas alrededor de las mesas?

86) ¿Cuántos números naturales hay entre 1 y 10.000 inclusive, que no son divisibles por 2, 3, 5 o 7?

87) ¿De cuántas maneras pueden repartirse n estudiantes en dos equipos que contengan por lo menos un estudiante?

88) Una urna tiene 7 bolas numeradas; Inicialmente se extraen 2 bolas, luego se extraen 3 bolas y finalmente se extraen 2 bolas. Calcular cuántas particiones ordenadas salen de grupos de 2, 3 y 2 bolas.

89) ¿De cuántas maneras pueden repartirse 17 juguetes entre 3 niños y 2 niñas, si cada niña debe recibir 4 juguetes y los niños deben recibir igual número de juguetes?

90) Un grupo de 10 excursionistas necesita desplazarse hacia una ciudad vecina, cuando llegan al terminal de transporte encuentran 3 buses (B1, B2 y B3) que hacen el recorrido, pero ninguno tiene los 10 cupos o puestos libres. B1 tiene 3 cupos, B2 tiene 4 cupos y B3 tiene 5 cupos. ¿De cuántas maneras se pueden repartir las 10 personas entre los 3 buses?

91) Se lanza un dado normal 5 veces y se anota la lista de puntajes resultantes. ¿En cuántas listas aparecen exactamente un doble y un triple de valores diferentes?

92) Se lanza un dado normal 6 veces y se anota la lista de puntajes resultantes. ¿En cuántas listas aparecen exactamente dos triple de valores diferentes?

93) Cuando se lanzan 9 dados distinguibles y se anotan los 9 puntajes resultantes, ¿En cuántos resultados aparecen un doble, un triple y un cuádruplo de valores diferentes?

94) Cinco personas suben a una buseta que tiene siete puestos disponibles. ¿De cuántas formas pueden elegir los puestos para sentarse?

95) Hay 12 estudiantes en una clase y hay 3 exámenes o temas diferentes para ser evaluados. ¿De cuántas maneras pueden los 12 estudiantes tomar los tres exámenes diferentes, si cada examen debe ser tomado por cuatro estudiantes?

96) ¿Cuántos números enteros de 6 cifras, en el sistema decimal, empiezan por 5, terminan en 0 y sus cifras suman 20?

97) Un niño debe colorear una bandera que tiene 9 franjas verticales de igual tamaño y dispone de 8 colores diferentes. Solo puede usar 3 colores diferentes, con un color debe colorear dos franjas, con otro color debe colorear otras tres franjas, y con el otro color debe colorear las otras cuatro. ¿De cuantas maneras se puede colorear la bandera?

98) Cuántas naranjas de igual tamaño se necesitan para formar una pirámide de base triangular regular, si cada lado de la base debe tener n naranjas?

99) En una bodega se encuentra una gran cantidad de frascos de mermelada de 4 sabores: Piña, Fresa, Manzana y Naranja. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 7 frascos, sin importar el sabor de la mermelada?

100) En una cava hay una gran cantidad de botellas de vino: Chileno, Francés, Italiano y Nacional. Una persona compra 8 botellas. ¿De cuántas maneras las puede seleccionar?

101) De un grupo de 5 personas, ¿De cuántas maneras pueden elegirse máximo 3 de ellas para realizar 3 trabajos, si una misma persona puede ocuparse de 2 o más trabajos?

102) ¿De cuántas maneras se pueden asignar n tareas a m personas, si una persona puede realizar varias tareas?

103) ¿De cuántas formas se pueden colocar 7 anillos idénticos en 4 dedos de una mano?

104) Si no importa el orden, ¿Cuántos resultados distintos hay, cuando se lanzan m monedas idénticas?

105) Si no importa el orden, ¿Cuántos resultados posibles hay cuando se lanzan m dados idénticos?

106) ¿Cuántos términos tiene el desarrollo de $(x_1+x_2+ \ldots + x_n)^m$?

107) ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$?

108) ¿Cuántas soluciones enteras no negativas que tiene la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2n$

109) ¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4=24$, si cada $x_k > 1$?

110) En el desarrollo de $(a + b + c + u + v + w)^{21}$, ¿Cuál es el coeficiente del término $x^2y^3z^4u^3v^4w^5$?

111) Se quiere fabricar un dominó usando los números enteros que van desde 0 hasta n. ¿Cuántas fichas tendrá este dominó?

112) Se quieren fabricar un juego similar al dominó en donde las fichas sean triángulos equiláteros. Se trazan segmentos del baricentro hasta cada uno de los vértices formándose tres triángulos isósceles. Si para cada uno de los triángulos isósceles se elige un número entero del 0 al n, ¿Cuántas fichas se deben fabricar para este nuevo juego?

113) Se quiere fabricar un juego similar al dominó en donde las fichas sean hexágonos regulares. Se trazan segmentos del baricentro hasta cada uno de los vértices formándose seis triángulos equiláteros. Si para cada uno de estos triángulos se elige un número entero del 0 al n, ¿Cuántas fichas tiene este nuevo juego?

114) En un salón se encuentran m mujeres y n hombres. Se deben formar k parejas para bailar $(k < \min\{m, n\})$. ¿De cuántas maneras se pueden formar las k parejas?

115) Una urna contiene 50 fichas, cada una con un número grabado. La tabla muestra la cantidad de números de cada paridad y signo. Si se extraen tres fichas simultáneamente y se multiplican sus números, ¿En cuántos productos el resultado es un número: Impar negativo?, Par positivo?, Impar positivo?, Par negativo?

	Pares	**Impares**
Positivos	11	12
Negativos	13	14