PROBABILIDADES
GUIA No 1

CONCEPTOS PRELIMINARES

1. Experimentos

Experimento: Un experimento es cualquier proceso que genere un conjunto de datos; cada dato o registro recibe el nombre de observación. Los experimentos pueden ser deterministas o no deterministas.

Experimento determinista: Es el experimento donde se obtendrá el mismo resultado siempre y cuando no se modifiquen las condiciones bajo las cuales se está realizando el experimento; en el cálculo y la física se encuentran muchos ejemplos de experimentos deterministas.

Experimento probabilístico: Un experimento aleatorio, probabilístico o estocástico es el que tiene las siguientes características:
a) Es posible repetir indefinidamente el mismo experimento sin cambiar las condiciones.
b) Aunque no podemos indicar el resultado, si podemos describir el conjunto de todas los posibles resultados.
c) A medida que se repite un gran número de veces el experimento nos acercamos a un patrón definido o regularidad, esta regularidad es la que hace posible construir un modelo matemático preciso, que finalmente servirá para analizar el experimento.

2. Modelos

Modelos: Son representaciones de fenómenos observables que nos permiten predecir o deducir cierto número de consecuencias, o llegar a resultados cuantitativos o cualitativos. Siempre que se quiera estudiar un fenómeno es necesario construir un modelo, este modelo puede ser determinista o probabilístico.

a) **Modelo determinista:** Es aquel modelo que estipula que las condiciones en las que se verifica un experimento determinan el resultado del mismo.

b) **Modelo probabilístico o estocástico:** Es aquel modelo que dentro de las condiciones en que se realiza arroja resultados en un intervalo de posibilidad, es decir, no determina o predice con exactitud un resultado. En este tipo de modelo las condiciones experimentales solo determinan el comportamiento probabilístico de los resultados observables. Los últimos capítulos de este texto se estudiarán diferentes tipos de modelos probabilísticos.

3. Conjuntos

Definición: Un conjunto es una colección de objetos, generalmente seleccionados bajo una condición. Si el conjunto A está contenido en el conjunto B, A es un subconjunto de B.

Operaciones: Las operaciones básicas entre conjuntos son la unión, la intersección, la diferencia, diferencia simétrica, el complemento y el producto cartesiano. Si que A y B son dos conjuntos contenidos en un conjunto universal U, entonces:

a) **Unión** : $C = A \cup B = \{ x : x \in A \text{ o } x \in B \text{ (o ambos)} \}$
b) **Intersección** : $C = A \cap B = \{ x : x \in A \text{ y } x \in B \}$
c) **Diferencia** : $C = A - B = \{ x : x \in A \text{ y } x \notin B \}$
d) **Diferencia simétrica**: $C = A \Delta B = \{ x : (x \in A \text{ y } x \notin B) \text{ ó } (x \in B \text{ y } x \notin A \}$
e) **Complemento** : $A^C = \{ x : x \in U \text{ y } x \notin A \}$
f) **Producto cartesiano** : $AxB = \{ (a,b) : a \in A \text{ y } b \in B \}$

Definición: Se llama **Conjunto de partes** de un Conjunto A al conjunto de todos los subconjuntos de A y se simboliza con P(A). Un conjunto A con n elementos tiene 2^n subconjuntos o partes.

Definición: Una **Partición** del conjunto A no vacío es una colección $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de subconjuntos de A que cumplen las siguientes condiciones:
- $A_k \neq \varnothing$; para k=1,2,…,n.
- $A_k \cap A_j = \varnothing$; para todo $k \neq j$, k,j=1,2,…,n.
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$

Propiedades de los conjuntos: Algunas propiedades de los conjuntos que se usan con frecuencia en el cálculo de probabilidades son las siguientes:

Leyes de identidad: Sea U el conjunto referencial o universal y A un conjunto en U, entonces:
a) $A \cup \varnothing = A$ b) $A \cup U = U$ c) $A \cap U = A$ d) $A \cap \varnothing = \varnothing$

Leyes de complemento: Sea U el conjunto referencial o universal y A un subconjunto de U, entonces:
a) $A \cup A^C = U$ b) $(A^C)^C = A$ c) $A \cap A^C = \varnothing$ d) $U^C = \varnothing$
e) $\varnothing^C = U$ f) $A \neq A^C$ g) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ h) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Leyes de idempotencia: Sea U el conjunto referencial o universal y A un subconjunto de U, entonces:
a) $A \cup A = A$
b) $A \cap A = A$

Leyes conmutativas: Sea U el conjunto referencial o universal, A y B subconjuntos de U, entonces:
a) $A \cup B = B \cup A$
b) $A \cap B = B \cap A$

Leyes asociativas: Sea U el conjunto referencial o universal. A, B y C subconjuntos de U, entonces:
a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Leyes distributivas o de Morgan: Sea U el conjunto referencial o universal. A, B y C subconjuntos de U, entonces:
a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Otras propiedades: Sea U el conjunto referencial o universal. A, B y C subconjuntos de U, entonces:
a) Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = A$. b) Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.
c) $A - B = A \cap B^C$ d) $A - B = A - (A \cap B)$
e) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$ f) $(A - C) - (B - C) = (A - B) - C$
g) $(A - B) - (A - C) = A \cap (C - B)$ h) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

4. Espacios Muestrales

Definición: Para cualquier experimento aleatorio E, el espacio muestral es el conjunto S de todos los resultados posibles. Cada resultado se llama observación, elemento o punto muestral.

Espacio muestral finito: El espacio muestral de un experimento aleatorio E es finito si tiene un número finito de puntos muestrales.

Espacio muestral infinito: El espacio muestral de un experimento aleatorio E es infinito si tiene un número finito contable o no contable de puntos muestrales. Por la imposibilidad de describir estos espacios elemento por elemento, es conveniente describirlos por comprensión.

Espacio muestral y Producto cartesiano: Supongamos que S es el espacio muestral de un experimento E, y supongamos que S es finito y que dicho experimento se realiza n veces, entonces, el espacio muestral asociado al experimento conformado por las n repeticiones del experimento E viene dado por el producto cartesiano $SxSxSxSx...xS = \{(s_1,s_2,s_3,...,s_n):s_i\in S,\ i=1,2,3,...,n\}$.

Diagrama de árbol: Cuando un experimento E tiene un espacio muestral finito y dicho experimento se repite n veces, para obtener el espacio muestral para las n repeticiones se requiere un producto cartesiano o un diagrama de árbol, como se ilustra en el ejemplo 30.

5. Eventos

Dado un experimento E y su espacio muestral S, definimos un evento B como un conjunto de posibles resultados, es decir, un evento es un subconjunto del espacio muestral S. Un evento asociado a un experimento puede ser:

(a) **Simple**: Un evento asociado a un experimento es simple si su espacio muestral tiene un único elemento, es decir, es un conjunto con un punto muestral.
(b) **Compuesto**: Un evento compuesto asociado a un experimento es un conjunto con dos o más puntos muestrales.
(c) **Seguro**: Un evento es seguro si su expresión como conjunto de puntos muestrales es igual al espacio muestral del experimento.
(d) **Imposible**: Un evento es imposible si su expresión como conjunto de puntos muestrales es el conjunto vacío.

Combinación de eventos: A continuación mostraremos algunas operaciones que nos permiten combinar eventos y obtener nuevos eventos:

El **complemento** de un evento A con respecto a un espacio muestral S es el conjunto de todos los puntos muestrales que están en S y que no están en A. Denotamos el complemento de A por el símbolo A^C.

La **unión** de los eventos A y B, que se representa con el símbolo $A\cup B$, es el evento que contiene a los puntos muestrales de A o los puntos muestrales de B, o a los puntos muestrales de ambos.

La **intersección** de dos eventos A y B, que se representa por el símbolo $A\cap B$, es el evento que contiene a todos los puntos muestrales comunes a A y a B.

Definición: Dos eventos A y B son ajenos, disyuntos, incompatibles o mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir juntos, es decir, si no tienen puntos muestrales en común.

Colecciones de eventos: Las combinaciones anteriores se pueden generalizar a colecciones finitas o infinitas contables de eventos:

a) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección finita de eventos, entonces $\cup A_k$ es el evento que ocurre si y solo si al menos uno de los eventos A_k ocurre.

b) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección finita de eventos, entonces $\cap A_k$ es el evento que ocurre si y solo si todos los eventos A_k ocurren.

c) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección infinita (contable) de eventos, entonces $\cup A_k$ es el evento que ocurre si y solo si al menos uno de los eventos A_k ocurre.

d) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección infinita (contable) de eventos, entonces $\cap A_k$ es el evento que ocurre si y solo si todos los eventos A_k ocurren.

Espacios equiprobables: Un espacio es equiprobable si todos sus eventos simples tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

6. Frecuencia Relativa

Definición: Se llama **frecuencia absoluta** al número de veces que se repite un dato de la muestra.

Definición: La **frecuencia relativa** es la frecuencia de un evento dividido por el número de elementos de la muestra. Si n_A es la frecuencia absoluta de un evento A y n es el número de resultados o datos que arroja el experimento E, entonces la frecuencia relativa está dada por $f_A = n_A/n$, lo cual será un número real entre 0 y 1.
Cuando se hace una partición del espacio muestral S, la proporción de la cantidad de elementos de cada parte A de dicha partición con respecto a la cantidad de elementos de S, se puede asociar al número f_A. En este otro contexto lo llamaremos p ó P(A) e indicará la posibilidad o probabilidad de que suceda el evento A.

La frecuencia relativa f_A satisface las siguientes propiedades:
1) $0 \leq f_A \leq 1$
2) $f_A = 1$ si y solo si A ocurre cada vez en las n repeticiones.
3) $f_A = 0$ si y solo si A nunca ocurra en las n repeticiones.
4) Si A y B son eventos mutuamente excluyentes y si f_{AUB} es la frecuencia relativa asociada al evento AUB, entonces $f_{AUB} = f_A + f_B$.
5) Cuando el número de repeticiones es considerablemente grande, entonces la frecuencia relativa de un evento A, es decir f_A, tiende a estabilizarse en la proximidad de un valor definido. A esta característica se le designa como regularidad estadística.

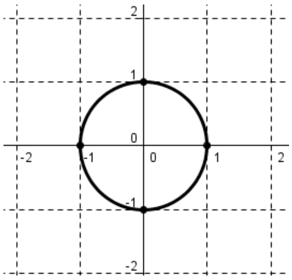
Definición: Si un espacio S se ha partido en n eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ordenados con frecuencias absolutas $f_1, f_2, \ldots, f_n$ respectivamente, entonces la **frecuencia acumulada** hasta el k-ésimo evento se define como $F_k = f_1+f_2+\ldots+f_k=\sum_{m=1}^{m=k} f_m$.

Ejercicios Propuestos

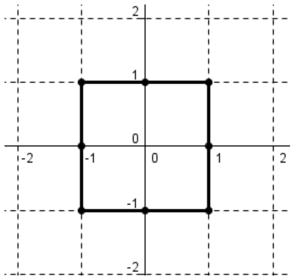
1) Supóngase que A, B y C son eventos en un espacio S. Represente gráficamente los siguientes eventos:
   a) $A^C \cup (B - C)$ b) $(A^C \cap B^C) - C$ c) $A \cup (B \cap C)$
   d) $A \cap (B^C - C^C)$ e) $(A \cup B)^C - (B \cap C)^C$ f) $(A^C - B^C) \cup C^C$

2) Dados tres conjuntos A, B y C, represente gráficamente las siguientes operaciones:
   a) $A \cap B^C \cap C^C) \cup [(A \cap B) \cap (A \cap B \cap C)^C]$
   b) $(A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B \cap C)$

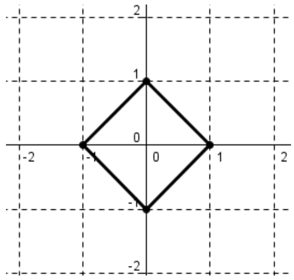
3) Supóngase que tres conjuntos A, B y C están dados por las regiones limitadas por cada una de las siguientes líneas cerradas:



Conjunto A.



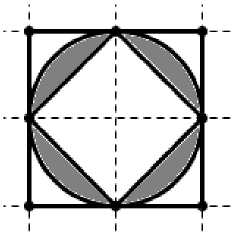
Conjunto B.

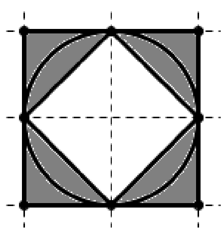


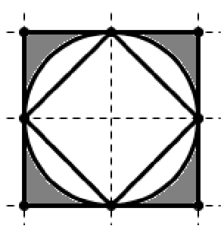
Conjunto C.

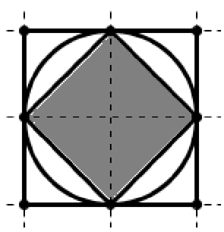
Represente gráficamente los siguientes conjuntos:
a) $(B - C)$ b) $(B - A)$ c) $(A \cap B \cap C)$
d) $(A - C)$ e) $A \cap (B \cup C)$ f) $A \cup (B \cap C)$

4) Exprese los conjuntos dados en los siguientes gráficos con base en los conjuntos A, B y C dados en el ejercicio anterior:

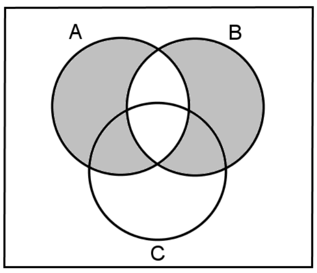

a)


b)

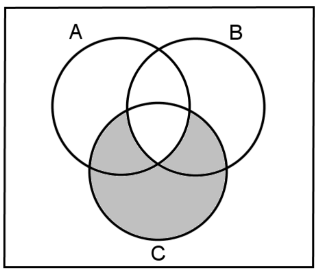

c)


d)

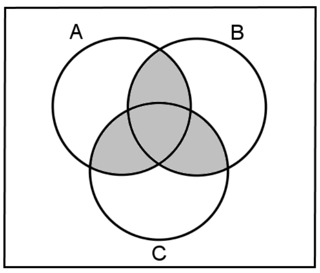
5) Considere los conjuntos X, Y y Z que se representan en los siguientes gráficos:



(I) Conjunto X



(II) Conjunto Y



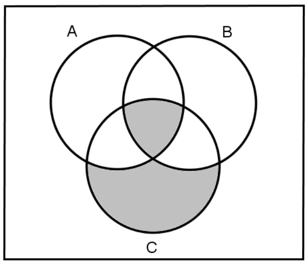
(III) Conjunto Z

Realice las operaciones:

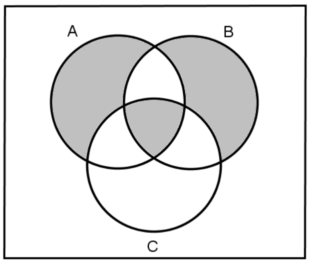
a) $X \cup Y$ b) $X – Y$ c) $X \cap Z$ d) $X \cup Z$

e) Determine cuál de las operaciones anteriores es igual a $(A \cup B \cup C) – (A \cap B)$.

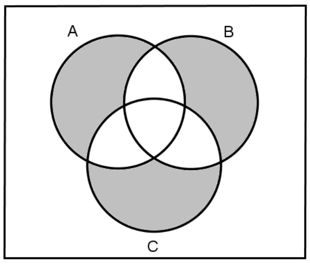
6) Exprese las combinaciones de conjuntos que se representan a continuación en términos de las operaciones básicas entre los conjuntos A, B y C.



(I)

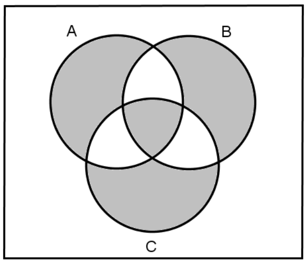


(II)

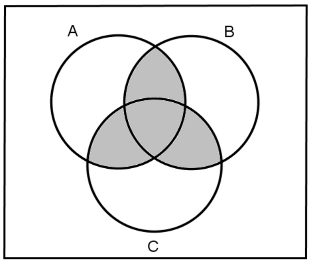


(III)

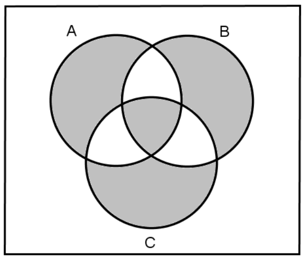
7) En los siguientes gráficos se presentan los conjuntos X, Y y Z.



Conjunto X.



Conjunto Y.



Conjunto Z.

Exprese las siguientes operaciones en términos de los conjuntos A, B y C:

a) $X – Y – Z$ b) $X \cup (Y \cap Z)$ c) $X \cap (Y \cup Z)$ d) $(X \cup Y \cup Z)C$

8) Se examinaron los gustos de un cierto número de estudiantes de la universidad hacia tres géneros musicales (clásica (C), rock (R), bolero (B)) y se encontró que: a 22 les gusta el rock, a 25 les gusta la música clásica, a 39 les gusta el bolero, a 9 les gusta la música clásica y el rock, a 17 les gusta el rock y el bolero, a 20 les gusta la música clásica y el bolero, a 6 les gustan los tres géneros, a 4 no les gusta ninguno de estos géneros. Encuentre los tamaños de los siguientes conjuntos y represéntelos usando las letras C, R y B:

a) El conjunto de los estudiantes que tienen gusto por dos géneros musicales, pero no por los tres?
b) El conjunto de los estudiantes que tienen gusto por un solo género musical?
c) El conjunto de los estudiantes que les gusta la música clásica y el bolero, pero no les gusta el rock?

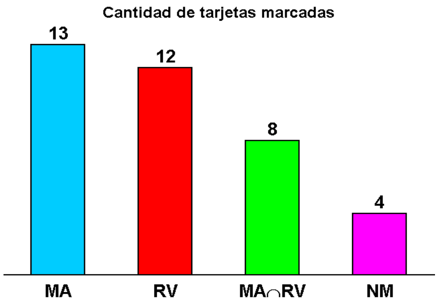
9) Una encuesta aplicada a 500 personas reveló los siguientes datos acerca del consumo de dos productos líquidos: Coca Cola (CC) y Postobón (PT).

- 590 personas consumían por lo menos uno de los dos productos.
- 390 personas consumían productos Coca cola.
- 216 personas consumían productos Coca cola pero no Postobón.

Represente en un diagrama de Venn a los siguientes conjuntos y determine qué porcentaje de la población encuestada corresponde al tamaño de los siguientes conjuntos:

a) El conjunto de personas que sólo consume Coca Cola.
b) El conjunto de personas que consume los dos productos.
c) El conjunto de personas que no consumía ninguno de los dos productos.

10) Un grupo de congresistas se reúne para discutir cuáles son las mayores necesidades de inversión en obras de infraestructura para la ciudad y concluyen que hay dos prioridades: Mantenimiento del alcantarillado de la ciudad (MA) y Reparación de las vías (RV). Se aprueba una partida de $ 500,000 millones y se debe decidir en cuál de las obras se invierte el dinero. Para evitar mayores discusiones se entrega a cada congresista una tarjeta en donde debe marcar qué obra apoya para ser ejecutada. Después de revisar las tarjetas quedó la información que se representa en el siguiente diagrama:



MA: Mantenimiento de alcantarillado.

RV: Reparación de Vías.

MA∩RV: Las dos obras.

NM: Tarjetas no marcadas.

a) ¿Cuál es el tamaño del conjunto $MA \cup RV$?
b) ¿Cuál es el tamaño del conjunto $MA \Delta RV$?

11) Se indagó en un numeroso grupo de estudiantes de una universidad estatal sobre tres temas prioritarios para la inversión social que deben ser atendidos por el próximo presidente: Vivienda (V), Salud (S), Educación (E). Los resultados de esta encuesta se presentan en la siguiente tabla:

Temas prioritarios:	Cantidad de estudiantes que opinan:
Vivienda	6750
Salud	6750
Educación	6450
Vivienda y Salud	3750
Vivienda y Educación	3550
Salud y Educación	3650
Salud, Vivienda y Educación	2000
No contestaron	1150

a) ¿Cuál es el tamaño del conjunto de los estudiantes que consideraron atender sólo dos de los tres temas prioritarios?
b) Con respecto a la totalidad de estudiantes encuestados, ¿Qué porcentaje de los estudiantes opinaron que se debe dar prioridad a la educación y la salud, pero no a la vivienda?
c) Con respecto a la totalidad de estudiantes encuestados, ¿Qué porcentaje de los estudiantes opinaron que debe darse prioridad a salud o educación, y no dar prioridad a la vivienda?

12) En un colegio se investigó a un grupo de 80 estudiantes de primer año matriculados en diferentes electivas y se encontró que: 36 tomaban Inglés, 32 tomaban Historia, 32 tomaban Ciencias Políticas, 16 tomaban Ciencias políticas e Historia, 16 tomaban Historia e Inglés, 14 tomaban Ciencias Políticas e Inglés, y 6 tomaban las tres materias. Organice en un diagrama de Venn los diferentes conjuntos dados, y determine los tamaños de los siguientes conjuntos:
a) El conjunto de los estudiantes que toman Inglés y no toman ninguno de los otros dos cursos.
b) El conjunto de los estudiantes que no toman ninguno de estos tres cursos.
c) El conjunto de los estudiantes que toman Historia pero no toman los otros dos cursos.
d) El conjunto de los estudiantes que toman Ciencias políticas e Historia pero no toman Inglés.
e) El conjunto de los estudiantes que no toman Ciencias Políticas.

13) Una urna contiene 7 tarjetas enumeradas del 1 al 7. Se extraen dos tarjetas simultáneamente y se anotan sus números. Considere los eventos o conjuntos de resultados A y B definidos como:

A = {la suma resultante es par}
B = {sólo uno de los números resultantes es impar}.

Halle el conjunto de los resultados tales que:
a) La suma es par y ninguno de los números es impar.
b) La suma es par y sólo uno de los números es impar.
c) La suma no es par y sólo uno de los números es impar.

14) Un experimento consiste en lanzar cinco veces una moneda que no tiene Cara y Sello si no Tres (3) y Cinco (5), y anotar los números resultantes. Considere los eventos o conjuntos de resultados A y B definidos como:
A = { sale "3" en los dos primeros lanzamientos }.
B = { sale "5" en los dos últimos lanzamientos }.

Halle el tamaño del conjunto de resultados en donde:
a) Sale "5" en los dos últimos lanzamientos pero no sale "3" en los dos primeros lanzamientos.
b) Sale "3" en los dos primeros lanzamientos pero no sale "5" en los dos últimos lanzamientos.
c) Sale "3" en los dos primeros lanzamientos y sale "5" en los dos últimos lanzamientos.

15) Un juego consiste en lanzar un dado normal dos veces, sumar los números resultantes y apostarle a cierto resultado. Anatoly apuesta a que resultará una suma mayor que 7 y Boris, por su parte, apuesta a que resultará una suman menor que 11. Escriba el conjunto de aquellos resultados para los cuales:
a) Sólo gana Anatoly.
b) Sólo gana Boris.
c) Ganan los dos, es decir, empatan.

16) Se lanzan dos dados normales y se consideran los eventos A y B, definidos como $A = \{ (x,y) : x + y \leq 8 \}$ y $B = \{ (x,y) : xy > 10 \}$.
Encuentre:
a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A^C d) B^C

17) Para aproximarse a una buena descripción del espacio muestral de un experimento aleatorio se debe dar cuenta de la naturaleza de los puntos muestrales, es decir, dar cuenta de cómo son, quiénes son y cuántos son los puntos muestrales. Describa el espacio muestral de los siguientes experimentos:

a) Se lanza una moneda cuatro veces y se observa la sucesión de caras y sellos obtenidos.

b) Se fabrican artículos en una línea de producción y se cuenta el número de artículos defectuosos producidos en un periodo de 24 horas.

c) Se fabrican artículos hasta producir 100 no defectuosos. Se cuenta el número total de artículos manufacturados.

d) Un jugador lanza un dardo tres veces sobre un tablero de tiro al blanco formado por tres círculos concéntricos. El jugador puede ganar \$500, \$1000 o \$2000 dependiendo de la zona en donde quede clavado el dardo. Se anotan los tres resultados obtenidos.

e) De una urna que contiene cinco esferas negras, se saca una y se anota su color.

f) Se elige al azar un punto del plano cartesiano y se anotan sus coordenadas cuando el punto está en la frontera o el interior de una circunferencia de radio igual a 4 centrada en el origen de coordenadas.

g) En un grupo de cinco ajedrecistas se seleccionan dos de ellos para realizar dos partidas, en que cada uno tendrá la oportunidad de jugar una partida con piezas blancas y otra con piezas negras.

h) De un conjunto de cinco letras diferentes se seleccionan dos letras para formar palabras en donde cada letra seleccionada debe aparecer dos veces.

i) Un aspirante a un cargo público debe presentar un examen en donde se le harán solo dos preguntas, que pueden ser sobre código laboral o código comercial aleatoriamente, el evaluador decide meter dos papeletas en un sobre y el aspirante debe sacar una papeleta y reponerla, luego sacar otra papeleta.

j) En un lugar determinado y durante un periodo de 24 horas, se registra de manera continua la hora y la respectiva temperatura en dicha hora.

k) Se tienen dos esferas plásticas (Azul - Blanca) en una caja. Se saca una esfera y se anota su color, se repone antes de sacar la siguiente esfera. Se repite el experimento tres veces.

l) En el departamento de control de calidad de cierta fábrica se seleccionan en forma aleatoria tres artículos de un proceso de manufactura, se examina cada uno de ellos y se clasifica como defectuoso o no defectuoso.

m) Se tiene una bolsa llena de tarjetas, en las cuales está escrita una proposición que puede ser falsa o verdadera. Se retira una tarjeta de la bolsa y se anota su valor de verdad, este proceso se realiza cuatro veces.

n) Un examen de selección múltiple tiene 5 preguntas con tres opciones de respuesta cada una y una sola respuesta correcta. Considere las maneras como se puede responder el examen.

18) ¿Cuántos puntos muestrales tienen los espacios de los siguientes experimentos:
a) Se lanza un dado 3 veces y se anotan los números resultantes.
b) Se lanza un dado 4 veces y se anotan los números resultantes.
c) Se lanza una moneda normal 4 veces y se anotan las figuras resultantes.
d) Se seleccionan 3 personas de un grupo de 5 personas A, B, C, D, E y F.
e) En una pequeña bodega se encuentran 40 botellas de whisky: 10 de Ballantines, 10 de Buchanans, 10 de Chivas Regal, 10 de Johnnie Walker y 10 de Old Parr. Un comprador lleva 4 botellas de wisky.

19) Un chico decide jugar ajedrez con una máquina, cada partida cuesta 1000 pesos y el chico dispone de una sola moneda de 1000 pesos. Si el chico le gana a la máquina, ésta le devuelve la moneda y le da como premio otra moneda igual. ¿Cuál es el espacio muestral para la posible cantidad de monedas que se lleva el chico, si juega seis, siete, ocho, n partidas?

20) Un chico tiene una moneda de \$ 100 y entra a un establecimiento a jugar con una máquina donde debe apostar \$ 100 por juego. Si el chico gana, la máquina le devuelve \$ 200; si empata, le devuelve \$ 100; y si pierde, pierde los \$ 100 apostados. Describa el espacio muestral para la posible cantidad de dinero que puede acumular el chico al final de la n-ésima partida.

21) Se lanzan cuatro monedas normales y se anotan las figuras los resultantes. Considere los eventos $A = \{$sale cara en las dos primeras monedas$\}$ y $B = \{$sale sello en la segunda y tercera moneda$\}$. Describa el espacio muestral del evento $A^C \cap B$.

22) Se lanza un dado normal dos veces y se anotan los números resultantes. Considere los eventos $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 > 31$ y $B = \{ x,y) : 7 \leq x + y \leq 9$. Describa el espacio muestral del evento $A \cap B^C$.

23) Se lanza un dado normal dos veces y se anotan los puntos que aparecen en la cara superior del dado. Considere los eventos $A = \{$los números resultantes suman más de 7$\}$ y $B = \{$Los números resultantes suman menos de 11$\}$. Describa el espacio muestral del evento $A \cap B$.

24) Se prueba un artefacto electrónico y se registra su tiempo total de uso, digamos t. Supongamos que el espacio muestral es $S = \{t : t \geq 0\}$. Considérense los eventos: $A = \{ t : t < 100 \}$; $B = \{ t : 50 \leq t \leq 200 \}$; $C = \{ t : t > 150 \}$.

Obtener los espacios muestrales para los siguientes eventos:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $B \cup C$ d) $B \cap C$

e) $A \cap C$ f) $A \cup C$ g) A^C h) C^C

25) Se lanza un dado normal 4 veces y se anotan los puntos que aparecen en la cara superior. Considere el evento en que salgan dos dobles. ¿Cuántos puntos muestrales tiene el espacio muestral de este evento?

26) En una empresa los empleados están clasificados en 10 categorías de acuerdo a su salario, el cual es recibido en dólares y oscila entre 350.00 y 850.00 dólares, como se muestra en la tabla de Frecuencias:

Salarios 350.00 - 850.00	**Frecuencia Absoluta**	**Frecuencia Relativa**	**Frec. Relativa Acumulada**
350.00 - 400.00	20		
400.10 - 450.00	25		
450.10 - 500.00	30		
500.10 - 550.00	10		
550.10 - 600.00	15		
600.10 - 650.00	20		
650.10 - 700.00	25		
700.10 - 750.00	35		
750.10 - 800.00	10		
800.10 - 850.00	10		

Si X representa el salario de un empleado elegido al azar, determine la frecuencia relativa de los conjuntos que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $|X - 500.000| \geq 150.000$ b) $|X - 550.000| \leq 80.000$

27) Un lote contiene artículos que pesan 5, 10, 15, …, 50 libras. Supóngase que hay dos artículos de cada peso. Se eligen dos artículos del lote. Identifíquese por X el peso del primer artículo elegido y por Y el peso del segundo artículo. El par (X,Y) representa un posible resultado del experimento. Determine el espacio muestral de los siguientes eventos:

a) $A = \{(X,Y) \mid X=Y\}$. b) $B = \{(X,Y) \mid Y>X\}$. c) $C = \{(X,Y) \mid Y=2X\}$.

28) Un lote contiene artículos que pesan 5, 10, 15 y 20 libras. Supóngase que hay tres artículos de cada peso. Se eligen dos artículos del lote. Identifíquese por X el peso del primer artículo elegido y por Y el peso del segundo artículo. El par (X,Y) representa un posible resultado del experimento. Determine el espacio muestral de los siguientes eventos:

a) $P = \{(X,Y) \mid Y - X = 10\}$ b) $Q = \{(X,Y) \mid \frac{X+Y}{2} < 30\}$. c) $R = \{(X,Y) \mid \frac{X+Y}{2} > 20\}$.

29) En un día festivo, por la intersección de dos avenidas principales pasaron 200 vehículos. De éstos, el 30% de los vehículos eran conducidos por menores de 25 años, a su vez, de los menores de 25 años, el 10% no respetaba el semáforo. Por otra parte, 5% de los conductores mayores de 25 años no respetaba el semáforo. Considere los eventos A y B definidos como A:={Dos conductores no respeten el semáforo}, y B:={De dos conductores que no respetan el semáforo, uno sea menor de 25, y otro mayor de 25}. Describa los espacios de A y B, y determine sus tamaños.

30) En un salón de juntas de una constructora se encuentras reunidos 10 ingenieros civiles colombianos, 15 ingenieros civiles extranjeros, 20 arquitectos colombianos y 15 arquitectos extranjeros. Se elige un profesional al azar y se definen los siguientes eventos: A:={el profesional es colombiano}, B:={el profesional es extranjeros}, C:={el profesional es ingeniero civil}, D:={el profesional es arquitecto}. Describa los siguientes eventos y halle sus tamaños:

a) $B \cup D$ b) $A^C \cap C^C$ c) $A - D$