20 Sistemas de ecuaciones diferenciales Valores y Vectores Propios

1. Variación de parámetros

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de coeficientes constantes, en donde las incógnitas son las funciones $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, …, $x_n = x_n(t)$.

$$\begin{array}{l} dx_1 / dt = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ dx_2 / dt = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ dx_n / dt = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{array}$$

Utilizando vectores y matrices se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} dx_1 / dt \\ dx_2 / dt \\ \vdots \\ dx_n / dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \ldots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

Una notación abreviada es:

$$X'(t) = [A_{nn}]\, X(t) + F(t).$$

Para resolver el sistema se imitará el procedimiento realizado para resolver una ecuación diferencial de primer orden de coeficientes constantes no homogénea por variación de parámetros, es decir, resolver una ecuación de la forma $\dfrac{dx}{dt} + a \cdot x(t) = f(t)$. [1]

Recordemos que en el procedimiento de por variación de parámetros para resolver la ecuación $\dfrac{dx}{dt} + a \cdot x(t) = f(t)$, primero se resuelve la ecuación homogénea $\dfrac{dx}{dt} + a \cdot x(t) = 0$.

$$\frac{dx}{dt} + a \cdot x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -a \cdot x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -a \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -a \cdot \int dt \Rightarrow \ln(x) = -at + c \Rightarrow x(t) = C \cdot e^{-at}.$$

Así, $x(t) = C \cdot e^{-at} = x_h(t)$ es la solución de la ecuación homogénea.

Ahora, para construir una solución particular $x_p(t)$ por este método, se cambia el parámetro C de $x_h(t) = C \cdot e^{-at}$ por la variable $u(t)$, quedando que $x_p(t) = u(t) \cdot e^{-at}$.

Si $x_p(t) = u(t) \cdot e^{-at} \Rightarrow x_p´(t) = u´(t) \cdot e^{-at} - a \cdot e^{-at} \cdot u(t)$.

Sustituyendo $x_p(t)$ y $x_p´(t)$ en $[1]$ se obtiene:

$u´(t) \cdot e^{-at} - a \cdot e^{-at} \cdot u(t) + a \cdot u(t) \cdot e^{-at} = f(t)$

$u´(t) \cdot e^{-at} = f(t) \Rightarrow u´(t) = f(t) \cdot e^{at} \Rightarrow u(t) = \int f(t) \cdot e^{at} \cdot dt$

Así, $x_p(t) = e^{-at} \cdot \int f(t) \cdot e^{at} \cdot dt$

Por tanto, la solución de la ecuación $\dfrac{dx}{dt} + a \cdot x(t) = f(t)$ es $x(t) = C \cdot e^{-at} + e^{-at} \cdot \int f(t) \cdot e^{at} \cdot dt$

Si llamamos $e^{-at} = \phi(t)$, entonces la solución se escribe $x(t) = C \cdot \phi(t) + \phi(t) \cdot \int f(t) \cdot \phi^{-1}(t) \cdot dt$.

2. Valores y vectores propios

Ahora, ¿Cómo imitar este procedimiento para resolver $X´(t) = [A_{nn}] X(t) + F(t)$?

Primero se halla la solución del sistema homogéneo asociado $X´(t) = [A_{nn}] X(t)$. ¿Cómo?

Supóngase que $X(t) = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda t} = K \cdot e^{\lambda t}$ es la solución de $X´(t) = [A_{nn}] X(t)$. [2]

$X(t) = K \cdot e^{\lambda t}$ y $X´(t) = K \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t}$ se sustituyen en $[2]$: $K \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} = [A_{nn}] K \cdot e^{\lambda t}$ [3]

La expresión $[3]$ simplificada es:

$$K \cdot \lambda = [A_{nn}] K$$
$$[A_{nn}] K - K \cdot \lambda = 0$$
$$([A_{nn}] - \lambda \mathrm{I}) \cdot K = 0$$

La solución trivial del sistema homogéneo $([A_{nn}] - \lambda \mathrm{I}) \cdot K = 0$ es $K = 0 = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Recordemos que el sistema $([A_{nn}] - \lambda \mathrm{I}) \cdot K = 0$ tiene solución trivial si $\det([A_{nn}] - \lambda \mathrm{I}) \neq 0$, y tiene soluciones no triviales si $\det([A_{nn}] - \lambda \mathrm{I}) = 0$.

La expresión $\det([A_{nn}] - \lambda \mathrm{I}) = 0$ conduce a la ecuación polinómica $P(\lambda) = 0$, llamada ecuación característica, la cual puede tener raíces reales diferentes, reales iguales o complejas. Cada raíz λ de $P(\lambda) = 0$ es un valor propio de la matriz $([A_{nn}] - \lambda \mathrm{I})$.

Al reemplazar el valor propio λ en el sistema homogéneo $([A_{nn}]-\lambda\mathrm{I})\cdot K=0$, se obtiene como solución un vector propio K_λ, el cual es un vector de constantes. Así, una solución del sistema $X'(t)=[A_{nn}]X(t)$ es $X_\lambda(t)=\mathrm{K}_\lambda\cdot e^{\lambda t}$

Si las raíces de $P(\lambda)=0$ son números reales diferentes $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ ...,\ \lambda_n$, se obtienen n vectores propios diferentes K_{λ_1}, K_{λ_2}, K_{λ_3}, ..., K_{λ_n}. Entonces, la solución general del sistema homogéneo $X'(t)=[A_{nn}]X(t)$ es: $\boxed{\mathrm{X(t)}=\mathrm{c}_1\mathrm{K}_{\lambda_1}e^{\lambda_1 t}+\mathrm{c}_2\mathrm{K}_{\lambda_2}e^{\lambda_2 t}+...+c_n\mathrm{K}_{\lambda_n}e^{\lambda_n t}}$.

Si el polinomio $P(\lambda)$ tiene coeficientes reales y las raíces de $P(\lambda)=0$ son complejas, y cada una aparecerá con su conjugado, es decir, si $z=\alpha+\beta i$ es una raíz, $\bar{z}=\alpha-\beta i$ también lo será.
Supóngase el caso en que A es una matriz de tamaño 2x2, las raíces son $\lambda_1=\alpha+\beta i$ y $\lambda_2=\alpha-\beta i$, los vectores propios son complejos K y $\overline{\mathrm{K}}$, entonces las soluciones del sistema son $\mathrm{X}_1(t)=K\cdot e^{(\alpha+\beta i)t}$ y $\mathrm{X}_2(t)=\overline{K}\cdot e^{(\alpha-\beta i)t}$.
Utilizando la fórmula de Euler $e^{\theta t}=Cos(\theta t)+iSen(\theta t)$ las soluciones se pueden expresar como $\mathrm{X}_1(t)=K\cdot e^{\alpha t}\left[Cos(\beta t)+i\cdot Sen(\beta t)\right]$ y $\mathrm{X}_2(t)=\overline{K}\cdot e^{\alpha t}\left[Cos(\beta t)-i\cdot Sen(\beta t)\right]$. Al realizar los productos se obtienen a las soluciones reales $\begin{cases}\mathrm{X}_1(t)=e^{\alpha t}\left[B_1\cdot Cos(\beta t)+B_2\cdot Sen(\beta t)\right]\\ \mathrm{X}_2(t)=e^{\alpha t}\left[B_2\cdot Cos(\beta t)-B_1\cdot Sen(\beta t)\right]\end{cases}$, en donde $\mathrm{B}_1=\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{K}+\overline{\mathrm{K}}\right)$ y $\mathrm{B}_2=\frac{i}{2}\cdot\left(\mathrm{K}-\overline{\mathrm{K}}\right)$. Finalmente la solución es $\boxed{\mathrm{X(t)}=\mathrm{c}_1X_1+\mathrm{c}_2X_2}$.

Si la ecuación $P(\lambda)=0$ tiene m raíces o valores propios que se repiten, resultarán m vectores propios linealmente independientes K_1, K_2, …, K_m tales que:

$$[\mathrm{A}-\lambda_1\mathrm{I}]\cdot\mathrm{K}_1=0$$
$$[\mathrm{A}-\lambda_1\mathrm{I}]\cdot\mathrm{K}_2=\mathrm{K}_1$$
$$[\mathrm{A}-\lambda_1\mathrm{I}]\cdot\mathrm{K}_3=\mathrm{K}_2$$
$$[\mathrm{A}-\lambda_1\mathrm{I}]\cdot\mathrm{K}_4=\mathrm{K}_3$$
$$....$$
$$[\mathrm{A}-\lambda_1\mathrm{I}]\cdot\mathrm{K}_\mathrm{m}=\mathrm{K}_{\mathrm{m-1}}$$

Con estos vectores propios, se construye la solución de la forma:

$$X(t)=c_1K_1e^{\lambda t}+c_2\left(K_1\frac{t}{1!}e^{\lambda t}+K_2e^{\lambda t}\right)+c_3\left(K_1\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}+K_2\frac{t}{1!}e^{\lambda t}+K_3e^{\lambda t}\right)+$$
$$c_3\left(K_1\frac{t^3}{3!}e^{\lambda t}+K_2\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}+K_3\frac{t}{1!}e^{\lambda t}+K_4e^{\lambda t}\right)...$$

En cualquiera de los tres casos, la solución de $X'(t) = [A_{nn}]X(t)$ se puede escribir en la forma matricial $X(t) = \phi(t) \cdot C = X_h(t)$, donde $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ : \\ c_n \end{bmatrix}$ es un vector de constantes y $\phi(t)$ es una matriz fundamental de soluciones.

Siguiendo con el procedimiento de variación de parámetros, ahora se buscará la solución particular $X_p(t)$ cambiando en $X_h(t) = \phi(t) \cdot C$ el vector $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ : \\ c_n \end{bmatrix}$ por el $U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ : \\ u_n(t) \end{bmatrix}$, obteniéndose $X_p(t) = \phi(t) \cdot U(t)$. $[4]$

Hallamos $X_p'(t) = \phi'(t) \cdot U(t) + \phi(t) \cdot U'(t)$ $[5]$

Se sustituyen $[4]$ y $[5]$ en $X'(t) = [A_{nn}]X(t) + F(t)$, y se obtiene:

$\phi'(t) \cdot U(t) + \phi(t) \cdot U'(t) = [A_{nn}](\phi(t) \cdot U(t)) + F(t)$ $[6]$

Como $X_h(t) = \phi(t) \cdot C$ es solución $X'(t) = [A_{nn}]X(t)$, entonces al sustituir $X_h(t) = \phi(t) \cdot C$ y $X_h'(t) = \phi'(t) \cdot C$ en $X'(t) = [A_{nn}]X(t)$ se obtiene:

$\phi'(t) \cdot C = [A_{nn}] \cdot \phi(t) \cdot C$, equivalente a $\phi'(t) = [A_{nn}] \cdot \phi(t)$. $[7]$

Se sustituye $[7]$ en $[6]$ y se obtiene:

$[A_{nn}] \cdot \phi(t) \cdot U(t) + \phi(t) \cdot U'(t) = [A_{nn}](\phi(t) \cdot U(t)) + F(t)$

$\phi(t) \cdot U'(t) = F(t)$

$U'(t) = \phi^{-1}(t) \cdot F(t) \Rightarrow U(t) = \int \phi^{-1}(t) \cdot F(t) \cdot dt$ $[8]$

Reemplazando $[8]$ en $[4]$ se tiene que $X_p(t) = \phi(t) \cdot \int \phi^{-1}(t) \cdot F(t) \cdot dt$.

Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones no homogéneo $X'(t) = [A_{nn}]X(t) + F(t)$ es:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$
$$X(t) = \phi(t) \cdot C + \phi(t) \cdot \int \phi^{-1}(t) \cdot F(t) \cdot dt$$

Como se puede apreciar, la solución del sistema de ecuaciones lineales de primer orden de coeficientes constantes y no homogéneo, es similar a la solución de la ecuación lineal de primer orden de coeficientes constantes y no homogénea:

$$x(t) = C \cdot \phi(t) + \phi(t) \cdot \int f(t) \cdot \phi^{-1}(t) \cdot dt \quad \text{VS} \quad X(t) = \phi(t) \cdot C + \phi(t) \cdot \int \phi^{-1}(t) \cdot F(t) \cdot dt$$

3. Ejemplo

Considérese el sistema $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

Primero se resuelve el sistema homogéneo $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

La ecuación característica es $\det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+5) = 0$

Los valores propios son $\lambda = -2$ y $\lambda = -5$.

Si $\lambda = -2$, entonces $\left[\begin{array}{cc|c} -3-(-2) & 1 & 0 \\ 2 & -4-(-2) & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Si $\lambda = -5$, entonces $\left[\begin{array}{cc|c} -3-(-5) & 1 & 0 \\ 2 & -4-(-5) & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Las soluciones son $X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$ y $X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t}$

La matriz fundamental de soluciones es $\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix}$.

La inversa de la matriz $\phi(t)$ es $\phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix}$

Entonces:

$$X_p(t) = \phi(t) \cdot \int \phi^{-1}(t) \cdot F(t) \cdot dt = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \cdot \int \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix} \cdot dt = \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

Así, la solución del sistema es:

$$X(t) = \phi(t) \cdot C + \phi(t) \cdot \int \phi^{-1}(t) \cdot F(t) \cdot dt$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

Ejercicios

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

01) $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Csc(t) \\ Sec(t) \end{bmatrix}$

02) $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{t} \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{bmatrix}$

03) $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{2t} \\ te^{3t} \end{bmatrix}$

04) $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} - \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t}$

05) $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$

06) Laboratorio:

Sabemos que para resolver la ecuación $x''(t) + a \cdot x'(t) + b \cdot x(t) = f(t)$, encontramos la solución de la ecuación homogénea asociada $x''(t) + a \cdot x'(t) + b \cdot x(t) = 0$ y luego por variación de parámetros hallamos la solución particular.

Supóngase que la solución de $x''(t) + a \cdot x'(t) + b \cdot x(t) = 0$ es $x_h(t) = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)$, entonces para hallar la solución particular por variación de parámetros, cambiamos los parámetros c_1 y c_2 por funciones $u_1(\text{t})$ y $u_2(t)$ tales $x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$ satisfaga a la ecuación $x''(t) + a \cdot x'(t) + b \cdot x(t) = f(t)$.

Si $W(t)$ es el wronskiano de las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$, entonces:

$u_1(t) = -\int \frac{x_2(t) \cdot f(t)}{W(t)} dt$ y $u_2(t) = \int \frac{x_1(t) \cdot f(t)}{W(t)} dt$.

Por lo tanto, $x_p(t) = -x_1(t) \int \frac{x_2(t) \cdot f(t)}{W(t)} dt + x_2(t) \int \frac{x_1(t) \cdot f(t)}{W(t)} dt$, y la solución general de la ecuación es: $x(t) = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) - x_1(t) \int \frac{x_2(t) \cdot f(t)}{W(t)} dt + x_2(t) \int \frac{x_1(t) \cdot f(t)}{W(t)} dt$.

¿Se podría imitar este procedimiento para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo