19 Sistemas de ecuaciones diferenciales Método de Operadores Anuladores

1. Operadores anuladores

La ecuación diferencial $a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$ se puede escribir como $\left(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right) y = g(x)$, donde $D^k y = \frac{d^k y}{dx^k} =$, y la expresión $L_h = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$ se llama operador diferencial lineal de orden n. De la ecuación $L_h y = g(x)$ se obtiene una ecuación homogénea aplicando a cada lado un operador L_g que anule a la función g(x), es decir, $L_g(g(x)) \bullet L_h(y) = L_g(g(x)) = 0$ es una ecuación homogénea. El operador anulador L_g sólo se puede obtener para los siguientes tipos de funciones:

a) Si $g(x)=P_n(x)$, entonces $L_g\left(P_n(x)\right) = D^{n+1}\left(P_n(x)\right) = 0$.

b) Si $g(x)=e^{ax}P_n(x)$, entonces $L_g\left(e^{ax} \bullet P_n(x)\right) = (D-a)^{n+1}\left(e^{ax} \bullet P_n(x)\right) = 0$.

c) Si $g(x)=e^{ax}P_n(x)[C_1 Cos(bx)+C_2 Sen(bx)]$, entonces el operador anulador es $L_g(g(x))=$ $\left(D^2 - 2abD + a^2 + b^2\right)^{n+1}\left(g(x)\right) = 0$.

Propiedades de los operadores anuladores:

a) Son lineales, es decir, $L(af(x)+bg(x))=aL(f(x))+bL(g(x))$.

b) Son conmutables, es decir, $L_1L_2=L_2L_1$. Son factorizables, es decir, $L=L_1L_2L_3\ldots L_n$.

c) Si $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, y los operadores anuladores de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son L_1 y L_2 respectivamente, entonces el operador anulador de f(x) es $MCM(L_1,L_2)$.

2. Método

Sean $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$,..., $x_n = x_n(t)$ funciones reales, $L_{11}(D)$, $L_{12}(D)$, …, $L_{nn}(D)$ operadores diferenciales, y $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$ funciones reales tales que conforman el sistema de ecuaciones lineales de coeficientes constantes que se muestra a continuación:

$$\begin{array}{l} L_{11}x_1(t) + L_{12}x_2(t) + \ldots + L_{1n}x_n(t) = f_1(t) \\ L_{21}x_1(t) + L_{22}x_2(t) + \ldots + L_{2n}x_n(t) = f_2(t) \\ \ldots \\ L_{n1}x_1(t) + L_{n2}x_2(t) + \ldots + L_{nn}x_n(t) = f_n(t) \end{array}$$

El sistema se resuelve como un sistema algebraico por el método de Kramer, de tal forma que la solución $x_k = x_k(t)$ se halla resolviendo la ecuación $Det\left[M(x_k)\right] x_k(t) = Det\left[M(f_k)\right]$.

Ejercicios

Use operadores anuladores para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

01) $\begin{cases} x'(t)+2x(t)-4y'(t)=e^{2t} \\ x'(t)+2y'(t)-4y(t)=e^{4t} \end{cases}$

02) $\begin{cases} x'(t)+x(t)+y(t)=e^{2t} \\ y'(t)+y(t)+x(t)=e^{4t} \end{cases}$

03) $\begin{cases} x''(t)+2x(t)-4y'(t)=t^{2} \\ x(t)+y''(t)-4x'(t)=t^{4} \end{cases}$

04) $\begin{cases} x''(t)+y''(t)=\text{Sen}(t) \\ x'(t)+4y'(t)=4\text{Cos}(t) \end{cases}$

05) $\begin{cases} x'(t)+y'(t)=e^{2t} \\ x'(t)+z'(t)=e^{3t} \\ y'(t)+z'(t)=e^{4t} \end{cases}$

06) $\begin{cases} x'(t)+y''(t)=e^{-2t} \\ x''(t)+z'(t)=e^{-3t} \\ y'(t)+z''(t)=e^{-4t} \end{cases}$

07) $\begin{cases} x''(t)-4y'(t)=\text{Sen}(2t) \\ 4x'(t)-y''(t)=\text{Cos}(2t) \end{cases}$

08) $\begin{cases} x''(t)-4y(t)=\text{Senh}(2t) \\ y''(t)-4x(t)=\text{Cosh}(2t) \end{cases}$

09) $\begin{cases} x'(t)+y(t)+z(t)=0 \\ x(t)+y'(t)+z(t)=0 \\ x(t)+y(t)+z'(t)=0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x''(t)+y'(t)=2t+e^{2t} \\ x'(t)+z''(t)=3t-e^{3t} \\ y''(t)+z'(t)=1+te^{4t} \end{cases}$