18 Transformada de Laplace Aplicaciones

A.1 Solución de ecuaciones diferenciales:

Se aplica el operador de Laplace a cada lado de la ecuación diferencial, se aplica la propiedad $L\left[f^{(n)}(x)\right]=p^{n}F(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$, y se despeja la función F(p). Finalmente, para hallar la función y=f(x) que satisface a la ecuación diferencial se halla la transformada inversa de F(p).

A.2 Ecuaciones integrales de Volterra:

Son ecuaciones de la forma $f(x)=h(x)+\int_0^x f(u)\cdot g(x-u)\cdot du$, donde h y g son funciones continuas conocidas. Obsérvese que $f(x)*g(x)=\int_0^x f(u)\cdot g(x-u)\cdot du$. Para resolver la ecuación de Volterra se aplica la transformada a cada lado obteniéndose que $L\left[f(x)-h(x)\right]=L\left[f(x)\right]\cdot L\left[g(x)\right]\Rightarrow L\left[f(x)\right]=\dfrac{L\left[h(x)\right]}{\left(1-L\left[g(x)\right]\right)}\Rightarrow f(x)=L^{-1}\left(\dfrac{L\left[h(x)\right]}{\left(1-L\left[g(x)\right]\right)}\right)$.

A.3 Sistemas de Ecuaciones diferenciales:

Si x=x(t) y y=y(t) son funciones desconocidas que satisfacen un sistema de ecuaciones diferenciales, entonces se aplica la transformada a cada lado de cada ecuación del sistema, convirtiéndose en un sistema algebraico donde las incógnitas son $L\left[x(t)\right]$ y $L\left[y(t)\right]$, se hallan las transformadas inversas de $L\left[x(t)\right]$ y $L\left[y(t)\right]$.

Ejercicios

Use la transformada de Laplace para resolver las siguientes ecuaciones:

01) $\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx}+y=x-[\![x]\!]. \\ y(0)=1. \end{cases}$

02) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+y(x)=\mathrm{Sen}(x)+\mathrm{Cos}(x). \\ y(0)=y'(0)=1. \end{cases}$

03) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}-5y=\begin{cases} x^2, 0\le x<1 \\ 0, x\ge 1. \end{cases}. \\ y(0)=1. \end{cases}$

04) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+y(x)=\mu\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{Sen}(x). \\ y(0)=y'(0)=1. \end{cases}$

05) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x\text{Cos}(x). \\ y\,'(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

06) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y(x) = \mu(x)\text{Sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right). \\ y(0) = y\,'(0) = 1. \end{cases}$

07) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + y = \begin{cases} 4-x, & x < 4 \\ x-4, & x \geq 4 \end{cases} \\ y(0) = 1. \end{cases}$

08) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y(x) = \left(\mu\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - \delta\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)\text{Sen}(x). \\ y(0) = y\,'(0) = 1. \end{cases}$

09) $\begin{cases} \dfrac{d^3y}{dx^3} + 4\dfrac{dy}{dx} = \text{Sen}(2x). \\ y(0) = y\,'(0) = y\,''(0) = 1. \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{d^3y}{dx^3} + 9\dfrac{dy}{dx} = Cos(3x). \\ y(0) = y\,'(0) = y\,''(0) = 1. \end{cases}$

Hallar L(f(x)) para las f(x) implícitas en las siguientes ecuaciones:

11) $\begin{cases} x\,f\,'(x) + f(x) = x\displaystyle\int_0^x f(T)dT \\ f(0) = 1 \end{cases}$

12) $\begin{cases} f\,''(x) + f(x) = \displaystyle\int_0^x \text{Cos}(T)dT \\ f(0) = f\,'(0) = 1 \end{cases}$

13) $\begin{cases} f\,''(x) + 4f(x) = \text{Sen}(2x) + \displaystyle\int_0^x \text{Cos}(2T)dT \\ f\,'(0) = f(0) = 0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} f\,'(x) + 2f(x) = x\text{Sen}(x) + \displaystyle\int_0^x \text{Sen}(T)dT \\ f(0) = 1 \end{cases}$

15) $\begin{cases} f\,'''(x) + 2f\,''(x) + f\,'(x) = x\text{Sen}(x) + \displaystyle\int_0^x f(T)\text{Sen}(x-T)dT \\ f(0) = f'(0) = f\,''(0) = 1 \end{cases}$

Resolver las siguientes ecuaciones integrales:

16) $f(x) = 4x - 3\displaystyle\int_0^x f(T)\text{Sen}(x-T)dT$

17) $f(x) = xe^x + \displaystyle\int_0^x zf(x-u)du$

18) $2\displaystyle\int_0^x f(z)\text{Cos}(x-z)dz = 4e^{-x} + \text{Sen}(x)$

19) $f\,'(x) = 1 - \text{Sen}(x) - \displaystyle\int_0^x f(z)dz\,,\ \ f(0) = 0.$

20) $x-2f(x)=\int_0^x\left(e^x-e^{-x}\right)f(x-z)dz$

21) $f'(x)=Cos(x)+\int_0^x f(z)Cos(x-z)dz\ ,\ f'(0)=1.$

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales:

22) $\begin{cases} x''(t)+x'(t)-2y''(t)=Sen(x) \\ y''(t)+y'(t)+2x''(t)=Cos(x) \\ x'(0)=x(0)=y'(0)=y(0)=1 \end{cases}$

23) $\begin{cases} x''(t)-2y''(t)=x^2 \\ y''(t)+2x''(t)=e^{2x} \\ x'(0)=x(0)=y'(0)=y(0)=1 \end{cases}$

24) $\begin{cases} x''(t)+x'(t)-2y'(t)=x \\ y''(t)+y'(t)+2x'(t)=1 \\ x'(0)=x(0)=y'(0)=y(0)=1 \end{cases}$

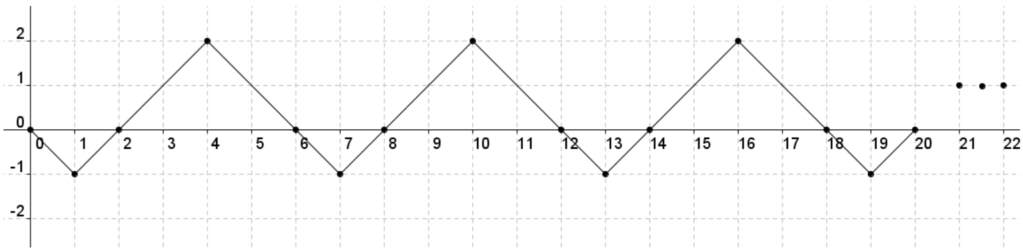
25) $\begin{cases} x''(t)-2y'(t)=t \\ x'(t)+2y''(t)=e^{-t} \\ x'(0)=x(0)=y'(0)=y(0)=1 \end{cases}$

26) $\begin{cases} x'-4x+y'''=5Sen(t) \\ x'+2x-2y'''=0 \\ x(0)=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0. \end{cases}$

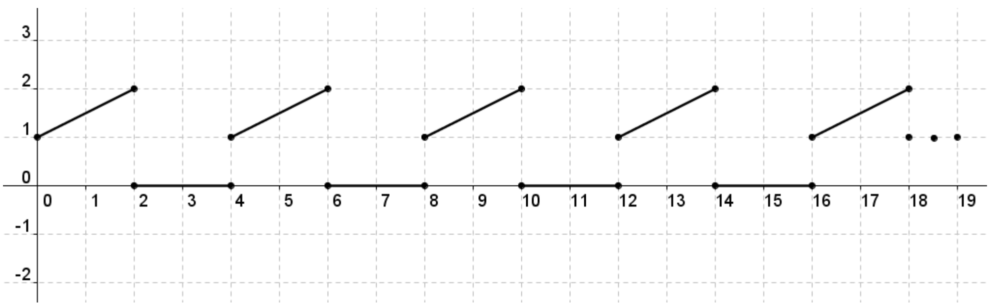
27) $\begin{cases} x''(t)-2y'(t)=t \\ x'(t)+2y''(t)=e^{-t} \\ x'(0)=x(0)=y'(0)=y(0)=1 \end{cases}$

Resolver las siguientes ecuaciones, donde f es la función que se representa en la gráfica:

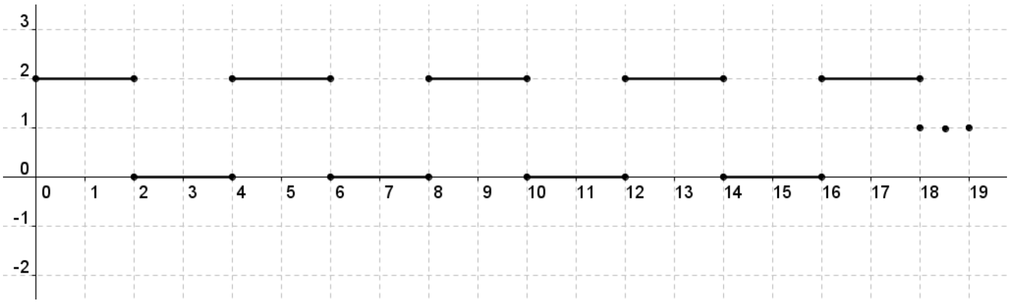
28) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+xy=|f(x)|. \\ y(0)=1. \end{cases}$



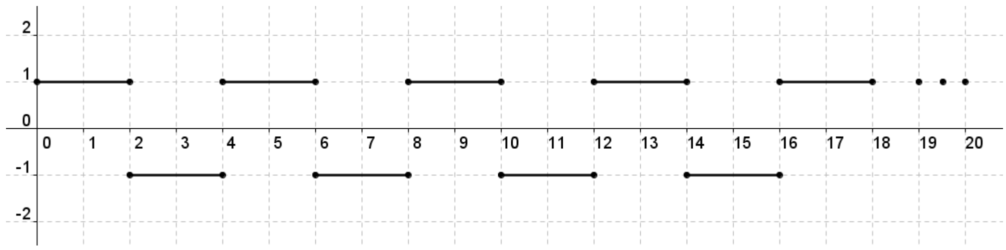
29) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+2y=f(x). \\ y(0)=1. \end{cases}$



30) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + y = f(x). \\ y(0) = 1. \end{cases}$



31) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + xy = \left|f(x)\right|. \\ y(0) = 1. \end{cases}$



32) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + xy = \left|Sen(x)\right|. \\ y(0) = 1. \end{cases}$

33) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + xy = \left|Cos(x)\right|. \\ y(0) = 1. \end{cases}$

34) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = \left|Sen(x)\right|. \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \end{cases}$

35) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - y = \left|x\right| - [\![x]\!]. \\ y(0) = 1. \end{cases}$