16 Transformada de Laplace Introducción

Definición: Una función y=f(x) es de orden exponencial k, si existen constantes k, M>0 y T>0, tales que $|f(x)| \leq Me^{kx}$ para todo x>T.

Definición: Si y=f(x) es una función continua para x≥0, entonces la transformada de Laplace de y=f(x) se define como $L[f(x)] = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx = F(p)$.

Condición de existencia: Si y=f(x) es una función continua por tramos en el intervalo $[0,\infty)$ y de orden exponencial k pata x>T, entonces $L[f(x)]$ existe para p>k.

Propiedades básicas de la transformada de Laplace:

a) $L[y = f(x)]$ es lineal, es decir, $L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L[f(x)] + \beta L[g(x)]$.

b) Si $L[f(x)] = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx = F(p)$, entonces $L^{-1}[F(p)] = f(x)$.

c) $L^{-1}[F(p)]$ es lineal, es decir, $L^{-1}[\alpha F(p) + \beta G(p)] = \alpha L^{-1}[F(p)] + \beta L^{-1}[G(p)]$.

d) Si y=f(x) es una función continua por tramos en el intervalo $[0,\infty)$ y de orden exponencial k pata x>T, entonces $\lim_{p\to\infty} L[f(x)] = \lim_{p\to\infty} F(p) = 0$.

Transformaciones básicas:

a) $L[f(x) = m] = \dfrac{m}{p}$

b) $L[f(x) = x^n] = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, (n natural).

c) $L[f(x) = e^{mx}] = \dfrac{1}{p-m}$

d) $L[f(x) = Sen(mx)] = \dfrac{m}{p^2 + m^2}$

e) $L[f(x) = Cos(mx)] = \dfrac{p}{p^2 + m^2}$

f) $L[f(x) = Senh(mx)] = \dfrac{m}{p^2 - m^2}$

g) $L[f(x) = Cosh(mx)] = \dfrac{p}{p^2 - m^2}$

h) $L[f(x) = x^\alpha] = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, $(\alpha > -1)$. Donde $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} dx$, $(\beta > 0)$.

Ejercicios

Hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

01) $f(x) = \left|\ |x-4| - 2\ \right|$

02) $f(x) = \left| 1 - x^2 \right|$

03) $f(x) = \left| (2+x)(4-x) \right|$

04) $f(x) = \left| x(x-5)(x-10) \right|$

05) $f(x) = \text{Sen}^3(2x)$

06) $f(x) = \text{Cos}^4(3x)$

07) $f(x) = \text{Sen}(2x)\text{Sen}(4x)\text{Sen}(6x)$

08) $f(x) = \text{Cos}(3x)\text{Cos}(5x)\text{Cos}(7x)$

09) $f(x)=\text{Cos}^3(mx)\text{Cos}^4(nx)$

10) $f(x)=\text{Sen}^3(mx)\text{Sen}^4(nx)$

11) $f(x)=\text{Cos}^3(mx)\text{Sen}^2(nx)$

12) $f(x)=\text{Sen}^4(x)\text{Cos}^6(x)$

13) $f(x) = [\![x]\!]$

14) $f(x) = \sqrt{x}$

15) $f(x) = x\sqrt{x}$

16) $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$

17) $f(x) = \begin{cases} |x-2|, & x < 4 \\ |x-6|, & x \geq 4 \end{cases}$

18) $f(x) = \begin{cases} \text{Cos}(x), & x < 2\pi \\ \text{Sen}(x), & x \geq 2\pi \end{cases}$

19) $f(x) = \begin{cases} \text{Senh}(2x), & x < 6 \\ \text{Cosh}(4x), & x \geq 6 \end{cases}$

20) $f(x) = \begin{cases} x^2\text{Sen}(x), & x < 2\pi \\ e^x\text{Cos}(x), & x \geq 2\pi \end{cases}$

17) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2\pi \\ \text{Sen}(x-2\pi), & x \geq 2\pi \end{cases}$

18) $f(x) = \begin{cases} \text{Cos}(x), & x < 2\pi \\ \text{Sen}(x), & x \geq 2\pi \end{cases}$

19) $f(x) = \begin{cases} \text{Senh}(2x), & x < 6 \\ \text{Cosh}(4x), & x \geq 6 \end{cases}$

20) $f(x) = \begin{cases} x^2\text{Sen}(x), & x < 2\pi \\ e^x\text{Cos}(x), & x \geq 2\pi \end{cases}$

Hallar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

21) $F(p) = \dfrac{p^5 - 1}{p^6 - p^5}$

22) $F(p) = \dfrac{1}{p^4 - 16}$

23) $F(p) = \dfrac{1}{p^4 - 10p^3 + 35p^2 - 50p + 24}$

24) $F(p) = \dfrac{1}{p^5 - 3p^4 - 5p^3 + 15p^2 + 4p - 12}$

25) $F(p) = \dfrac{1}{p^4 - 25p^2 + 144}$

26) $F(p) = \dfrac{p^3 + 3p^2 + 9p + 12}{p^4 + 13p^2 + 36}$

27) $F(p) = \dfrac{1}{p^6 - p^2}$

28) $F(p) = \dfrac{1}{p^6 - p^4}$

29) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+4)(p^2+9)}$

30) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2-1)(p^2-4)(p^2-9)}$