15 Ecuaciones diferenciales de orden superior
Aplicaciones

Movimiento oscilatorio: Un sistema masa-resorte está compuesto por una masa m, sujeta al extremo libre de un resorte horizontal. Es conveniente introducir un sistema coordenado, de tal forma que se coloca el origen en el punto de equilibrio del sistema, o sea el punto en donde la masa queda cuando el resorte está en reposo.

Si en un instante t=0, se lleva la masa hasta un punto de coordenada x_0, ($x_0>0$ si se alarga el resorte, o $x_0<0$ si se comprime), y se le imprime a la masa una velocidad inicial v_0, ($v_0>0$ si es hacia la derecha, o $v_0<0$ si es hacia la izquierda), entonces la ecuación diferencial que conduce a la posición x(t) se puede determinar aplicando la segunda ley de Newton (F=ma) y de la ley de Hooke (F=-kx). Antes de construir la ecuación es conveniente definir tres fuerzas:

a) **Fuerza de restitución F_r:** Es la fuerza que trata de llevar el resorte a su longitud normal. Esta fuerza se define como $F_r=-kx$. Es negativa porque actúa en dirección contraria al movimiento y en la dirección del estado de reposo del resorte. La constante de proporcionalidad k que indica la dureza o rigidez del resorte. Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m se tiene que $ma=-kx$, o $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$, o $m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$.

b) **Fuerza de amortiguamiento o de fricción F_a:** Es la fuerza que aparece cuando el sistema está inmerso en un medio viscoso. Cuando F_a está presente se dice que el sistema es amortiguado, y cuando no está se llama no amortiguado. F_a es proporcional a la velocidad de la masa en cada instante y se define como $F_a=-b\frac{dx}{dt}$, donde b es la constante de amortiguamiento del sistema.

c) **Fuerza externa F_{ext}:** Esta fuerza puede o no estar presente en el sistema. Si lo está, el sistema se llama forzado o excitado, en caso contrario es no forzado.

Si se aplica a la masa m la segunda ley de Newton en un instante t, se obtiene la ecuación $m\frac{d^2x}{dt^2}=F_a+F_r+F_{ext}$. Como F_r y F_a se oponen al movimiento libre de la masa m, entonces $F_r=-kx$ y $F_a=-b\frac{dx}{dt}$, y la ecuación del movimiento es $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-b\frac{dx}{dt}+F_{ext}$.

Si b=0 y $F_{ext}=0$, el movimiento es armónico simple o movimiento no amortiguado y no forzado.
Si $b\neq 0$ y $F_{ext}=0$, el movimiento es amortiguado y no forzado.
Si $b\neq 0$ y $F_{ext}\neq 0$, el movimiento es amortiguado y no forzado.

Circuitos RLC: Un circuito en serie consiste de una fuente de voltaje (E), un resistor (R), un inductor (L) y un capacitor (C). Para obtener la ecuación diferencial para resolver un circuito RLC se requiere conocer las leyes de Kirchoff, de Ohm, de Faraday y de Lenz.

Sea q(t) la cantidad (en coulombios) de carga almacenada en el capacitor en un instante t. La rapidez de cambio de q(t) se conoce como la corriente del circuito, y se le denota por $\frac{dq}{dt} = i(t)$ (en amperios).

Ley de Kirchoff: La suma algebraica de las caídas de voltaje sobre los diferentes elementos de un lazo cerrado es 0.

Ley de Ohm: La caída de voltaje a través de un resistor es directamente proporcional, en cada instante, a la corriente que pasa por el resistor en ese mismo instante, por lo que esta caída tiene la forma $Ri(t)$. La constante R se llama la resistencia (en ohmios) del circuito.

Ley de Faraday: La caída de voltaje en el inductor es directamente proporcional, en cada instante, a la rapidez de cambio de la corriente en ese instante. Esta caída se representa por $L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$. La constante L se llama Inductancia (en henrios).

Ley de Lenz: La caída de voltaje en el capacitor (que se presenta por que la carga almacenada se opone a que ingrese más carga al capacitor) es directamente proporcional, en cada instante, a la carga almacenada en ese instante. Esta caída se representa por $\frac{1}{C}q(t)$. La constante C es la capacitancia del circuito (en Faradios).

Si E(t) es el voltaje que se le aplica al circuito en el instante t, y si suponemos que una fuente de voltaje suma voltaje al circuito, las leyes de Kirchoff nos conducen a la ecuación diferencial $L\frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t)$ o $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = E(t)$.

Ejercicios

Resolver los siguientes problemas:

1) Una masa de 1 kg se sujeta al extremo libre de un resorte horizontal, de constante de rigidez 2 N/m. En el instante t=0 el resorte se alarga 50 cm y se le imprime a la masa una velocidad inicial de 4 m^2/sg hacia la izquierda. ¿Cuál es el primer instante en el que la masa pasa por la posición de equilibrio? ¿Cuál es el primer instante en el que la masa está lo más separada posible con respecto a la posición de equilibrio? (Tomar dirección positiva hacia la derecha).

2) Una masa de 1 kg se sujeta al extremo libre de un resorte horizontal, de constante de rigidez 8 N/m. La constante de amortiguamiento para el sistema es 2 $\frac{N-s}{m}$. En el instante t=0 el resorte se comprime 40 cm y se le imprime a la masa una velocidad inicial de 2 m/sg hacia la izquierda. ¿Cuál es el primer instante en el que la masa pasa por la posición de equilibrio pero desplazándose hacia la izquierda? ¿Cuál es la mayor separación de la masa con respecto a la posición de equilibrio? ¿Cuál es el mayor desplazamiento de la masa a la derecha de la posición de equilibrio? (Tomar dirección positiva hacia la derecha).

3) Una masa de 1 kg se sujeta al extremo libre de un resorte horizontal, de constante de rigidez 1 N/m. La constante de amortiguamiento para el sistema es 3 $\frac{N-s}{m}$. En el instante t=0 el resorte se comprime 60 cm y se le imprime a la masa una velocidad inicial de 1 m/sg hacia la derecha. ¿Cuáles el instante en el que la masa pasa por la posición de equilibrio? ¿Cuál es la mayor separación de la masa con respecto a la posición de equilibrio? (Tomar dirección positiva hacia la derecha).

4) Una masa de 3 kg se sujeta al extremo libre de un resorte horizontal, de constante de rigidez 6 N/m. La constante de amortiguamiento para el sistema es 8 $\frac{N-s}{m}$. En el instante t=0 el resorte se alarga 100 cm y se le imprime a la masa una velocidad inicial de 4 m/sg hacia la derecha. Determine si la masa pasa por la posición de equilibrio. ¿Cuál es la mayor separación de la masa con respecto a la posición de equilibrio? (Tomar dirección positiva hacia la derecha).

5) Una masa de 1 kg se sujeta al extremo libre de un resorte horizontal, de constante de rigidez 2 N/m. La constante de amortiguamiento para el sistema es $2\frac{N-s}{m}$. En el instante t=0 el resorte se alarga 60 cm y se le imprime a la masa una velocidad inicial de 2 m/sg hacia la izquierda. Simultáneamente se le aplica a la masa una fuerza externa dada por $F_{ext}(t)$ = 2Cos(2t) N. ¿Cuál es el primer instante posterior a los 100 segundos en el que la masa pasa por la posición de equilibrio?

6) Una carreta de 120 lb de peso está sujeta a un muro por medio de un resorte de rigidez 60 lb/pie. Se aparta la carreta 6 pies del muro desde la posición de equilibrio y se suelta sin velocidad inicial. Simultáneamente, se le aplica una fuerza externa $F_{ext}(t)$ = 30Sen(4t). Si no hay fricción, ¿Cuál es la posición de la carreta en cualquier instante $t \geq 0$?

7) Una masa de 0.5 kg está sujeta al extremo libre de un resorte horizontal que tiene constante de rigidez 16 N/m. La constante de amortiguamiento para el sistema es de 4 $\frac{N-s}{m}$. En el instante t=0 el resorte se comprime 25 cm y se le imprime a la masa una velocidad inicial de 4 m/sg hacia la izquierda. (tomar la dirección positiva hacia la derecha). ¿Cuál es el primer instante en el que la masa pasa por la posición de equilibrio, desplazándose hacia la izquierda? ¿Cuál es la mayor separación de la masa con respecto a la posición de equilibrio?

8) Una masa de 6 kg está sujeta al extremo libre de un resorte horizontal que tiene constante de rigidez 1 N/m. La constante de amortiguamiento para el sistema es de 5 $\frac{N-s}{m}$. En el instante t=0 el resorte se estira 90 cm y se le imprime a la masa una velocidad inicial de 6 m/sg hacia la izquierda. Si se toma la dirección positiva hacia la derecha, ¿Cuál es el instante en el que la masa pasa por la posición de equilibrio? ¿Cuál es la mayor separación de la masa con respecto a la posición de equilibrio?

9) Un cuerpo que pesa 8 libras sujeto a un resorte está sometido a un movimiento armónico simple. Determinar la ecuación del movimiento si la constante del resorte es 1 lb/pie sabiendo que el cuerpo se suelta desde un punto que está 6 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia abajo de 1.5 pie/seg.

10) Un cuerpo que pesa 64 libras sujeto al extremo de un resorte estira a éste 0,32 pies. El cuerpo ocupa una posición que está 8 pulgadas por encima de la posición de equilibrio y desde ahí se le aplica una velocidad dirigida hacia abajo de 5 pie/seg. Encontrar la ecuación del movimiento.

11) Al fijar un contrapeso de 24 lb al extremo de un resorte, lo estira 4 pulgadas. Deduzca la ecuación del movimiento cuando el contrapeso se suelta y parte del reposo desde un punto que está 3 pulgadas arriba de la posición de equilibrio.

12) Una masa que pesa 2 lb hace que un resorte se estire 6 pulgadas. Cuando t = 0, la masa se suelta desde un punto a 8 pulgadas abajo de la posición de equilibrio con una velocidad inicial, hacia arriba, de 4/3 pies/seg. Deduzca la ecuación del movimiento libre.

13) Una masa de un kilogramo se sujeta a un resorte cuya constante es de 16 N/m y el sistema completo se sumerge en un líquido que le comunica una fuerza de amortiguación numéricamente igual a diez veces la velocidad instantánea. Determinar las ecuaciones del movimiento y sus respectivas gráficas, si: a) El peso se suelta, a partir del reposo, desde un punto que está un metro por debajo de la posición de equilibrio. b) El peso se suelta desde un punto que está 1m por debajo de la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia arriba de 12m/seg.

14) Un peso de cuatro libras se sujeta a un resorte suspendido del techo. Cuando el peso llega al reposo en equilibrio, el resorte se ha estirado tres pulgadas. La constante de amortiguación del sistema es 0.5 lbXseg/pie. Si el peso se levanta dos pulgadas arriba del punto de equilibrio y se le aplica una velocidad inicial dirigida hacia arriba, de 0.5 pie/seg, determinar la ecuación del movimiento del peso y hacer una gráfica detallada de dicha ecuación.

15) Una masa de 8 lb de peso estira 2 pies un resorte. Si una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 2 veces la velocidad instantánea actúa sobre el contrapeso, deduzca la ecuación del movimiento si la masa se suelta de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 3 pies/seg.

16) Un objeto que pesa 16 lb se une a un resorte de 5 pies de longitud. En la posición de equilibrio, el resorte mide 8.2 pies. Si el peso se eleva y se suelta del reposo en un punto a 2 pies arriba de la posición de equilibrio, determine x(t). Considere que el medio que rodea al sistema ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a la velocidad instantánea.

17) Una fuerza de 400 N estira 2 m un resorte. Después, al extremo de ese resorte, se fija una masa de 50 kg y parte de la posición de equilibrio a una velocidad de 10 m/s hacia arriba. Deduzca la ecuación del movimiento.

18) Se cuelga una masa de 1 kg de un resorte cuya constante es 9 N/m. Al principio, la masa parte de un punto a 1 m arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad de $\sqrt{3}$ m/seg hacia arriba. Determine los momentos en que la masa se dirige hacia abajo con una velocidad de 3 m/seg.

19) Una fuerza de 2 lb estira 1 pie un resorte. A ese resorte se le une un contrapeso de 3.2 lb y el sistema se sumerge en un medio que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 0.4 la velocidad instantánea. Deduzca la ecuación del movimiento si el contrapeso parte del reposo 1 ti arriba de la posición de equilibrio. Calcule el primer momento en que el contrapeso pasa por la posición de equilibrio dirigiéndose hacia arriba.

20) Una masa de 1 kg se sujeta al extremo libre de un resorte (horizontal) de rigidez 4 N/m. La masa se aparta 50 cm de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad inicial de 2 m/seg (hacia la derecha). Simultáneamente, se le aplica una fuerza externa $F_{ext}(t) = 4Sen(2t)$. Si no hay fricción, hallar la posición de la masa en cualquier instante t>0.

21) Considerar un circuito en serie LRC, con L = 1 H, R = 2 Ω, C = 0.25 F y E(t) = 50 cos(t) voltios. Hallar la corriente i(t).

22) Consideremos un circuito RLC en serie en el que E(t)=40Cos(2t) voltios, R = 2 ohmios, L = 1 4 henrios y C = $\frac{1}{13}$ faradios. Si la corriente inicial es 0 amperios y si la carga inicial es 3.5 coulombs, determinar la carga en el capacitor en cada instante t.

23) Consideremos un circuito RLC en serie en el que E(t) = 0 voltios, R = 60 ohmios, L = 2 henry y C = 1/400 faradios. Si la corriente inicial es 2 amperios y si la carga inicial es 1/12 coulombs, determinar la máxima carga en el capacitor. ¿La carga se anula en algun instante?

24) Se tiene un circuito RLC en serie que consta de una fuerza electromotriz E (t)=50Cos(t) volts, un resistor de R = 2 ohmios, un inductor de L = 1 Henrios y un condensador de C = 0.25 Faradios. Si la corriente y la carga inicial del condensador son cero, hallar la carga del condensador para t > 0.

25) Considerar un circuito en serie LRC, con L = 0.5 H, R = 10 Ω, C = 1/100 F, E(t) = 150 voltios. Determinar la carga instantánea q(t) en el condensador para t > 0; q(0) = 1 i(0) = 0. ¿Cuál es la carga de éste después de un tiempo largo?

26) Determine la carga del capacitar en un circuito en serie LRC cuando t = 0.01 seg, L = 0.05 henrios, R = 2 Ohms, C = 0.01 faradios, E(t) = 0 Voltios, q(0) = 5 C e i(0) = 0 Amperios. Encuentre el primer momento en el que la carga en el capacitor es cero.

27) Determine la carga en el capacitar de un circuito en serie LRC cuando L = 1/4 henrios, R = 20 Ohms, C = 1/300 faradios, E(t) = 0 Voltios, q(0) = 4 C e í(0) = 0 Amperios. ¿En algún momento la carga del capacitor es igual a cero?

28) Determine la corriente de estado estable en un circuito en serie LRC cuando L = 0.5 henrios, R =20 Ohms, C = 0.001 faradios, y E(t) = 100Sen(60t) + 200Cos(40t) Voltios.

29) Calcule la carga en el capacitor de un circuito en serie LRC cuando L = 0.5 henrios, R = 10 Ohms, C =0.01 faradios, E(t) = 150 Voltios, q(0) = 1 C.

30) Determine la carga q(t) en el capacitar de un circuito en serie LRC, cuando L = 0.25 henry, R = 10 ohms, C = 0.001 farad, E(t) = 0, q(O) = q_o coulombs e i(O) = 0 amperes.