14 Ecuaciones diferenciales de orden superior
Ecuación de Cauchy - Euler

Ecuaciones de Cauchy-Euler: Una ecuación diferencial lineal es de Cauchy-Euler si es de la forma $a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$.

Método de solución: Se presentará el método para la ecuación de segundo orden, buscando soluciones de la forma $y=x^m$ de la ecuación homogénea $ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0$.

Si $y=x^m$ es una solución de la ecuación $ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0$, entonces los valores los valores de m satisfacen la ecuación am(m-1)+bm+c=0. Las raíces de esta ecuación pueden ser reales diferentes, reales iguales o complejas de acuerdo al signo del discriminante $D = (b-a)^2 - 4ac$.

Caso 1: Si D>0, entonces las raíces $m = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$ son reales diferentes m_1 y m_2, y la solución de la ecuación será $Y_h(x) = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$.

Caso 2: Si D=0, entonces las raíces $m = -\frac{(b-a)}{2a}$ son reales iguales. La primera solución será $y_1(x) = x^m$. La segunda solución será $y_2(x) = x^m \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a} dx}}{x^{2m}} dx = x^m \ln(x)$. Así la solución general será $Y_h(x) = C_1 x^m + C_2 x^m \ln(x)$.

Caso 3: Si D<0, entonces las raíces $m = -\frac{(b-a)}{2a} \pm \frac{\sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a} = \alpha \pm \beta i$ son complejas. Las soluciones serán $y_1(x) = x^{(\alpha+\beta i)}$ y $y_2(x) = x^{(\alpha-\beta i)}$. Utilizando la fórmula de Euler, el principio de superposición y la fórmula de D´Alembert $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1(x)^2} dx$ se obtiene la solución general $Y_h(x) = x^{\alpha} \left(C_1 \mathrm{Cos}(\beta \ln(x)) + C_2 \mathrm{Sen}(\beta \ln(x))\right)$.

Si la ecuación no es homogénea, se utiliza el método de variación de parámetros para encontrar la solución particular $Y_p(x)$, y luego formar la solución general $Y(x)=Y_h(x)+Y_p(x)$.
Si la ecuación diferencial es de orden superior a 2, se generalizan los tres casos y se combinan si es necesario.

Una ecuación de Cauchy-Euler se puede transformar en una ecuación de coeficientes constantes mediante las sustituciones $x=e^t$ y $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{1+x}$.

2) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-5x\dfrac{dy}{dx}+8y=2x^3$.

3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{1}{x^2+x^3}$, $x>0$.

4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2y}{x^2}=\dfrac{\ln(x)}{x}$, $x>0$.

5) $4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-4x\dfrac{dy}{dx}+3y=8x\sqrt[3]{x}$

6) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^4e^x$

7) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=\ln(x)$, $x>0$.

8) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+2y=4\ln(x)$, $x>0$.

9) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+4y=2x\ln(x)$, $x>0$.

10) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-6y=\ln(x)$; $y(1)=\frac{1}{6}$, $y'(1)=-\frac{1}{6}$.

11) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-4x\dfrac{dy}{dx}+6y=\ln(x^2)$, $x>0$.

12) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^3\ln(x)$, $x>0$.

13) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+10y=\mathrm{Sen}(\ln(x))$, $x>0$.

14) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+y=\ln(x)\mathrm{Sen}(\ln(x))$, $x>0$.

15) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}-8y=\ln^3(x)-\ln(x)$, $x>0$.

16) $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+6x\dfrac{dy}{dx}-6y=\ln(ex)^3$, $x>0$.

17) $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+8x\dfrac{dy}{dx}-8y=4\ln(x)$, $x>0$.

18) $\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{3}{x}\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x^3}y=\dfrac{\ln^2(x)}{x^3}$, $x>0$.

19) $\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{1}{x}\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x^2}$.

20) $\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{3}{x}\dfrac{d^2y}{dx^2}=\ln(x)$, $x>0$.

Resolver las siguientes ecuaciones de coeficientes variables, convirtiéndolas previamente en ecuaciones de coeficientes constantes:

21) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}-8y=\ln^3(x)-\ln(x)$, $x>0$.

22) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{1+x}$.

23) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+4y=2x\ln(x)$, $x>0$.

24) $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=\dfrac{x}{1+x}$.

25) $x^4\dfrac{d^4y}{dx^4}+6x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+9x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

26) $x^4\dfrac{d^4y}{dx^4}+8x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+16x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+8x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

27) $x^5\dfrac{d^5y}{dx^5}+7x^4\dfrac{d^4y}{dx^4}+14x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}-4y=0$

28) $\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{5}{(x+3)}\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{10}{(x+3)^2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2y}{(x+3)^3}=0$

29) $(x+1)^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-3(x+1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4(x+1)\dfrac{dy}{dx}-4y=0$

30) $(x+1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-3(x+1)\dfrac{dy}{dx}+4y=(x+1)^3$

31) $(3x+4)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+10(3x+4)\dfrac{dy}{dx}+9y=0$

32) $(5x+4)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+(5x+4)\dfrac{dy}{dx}+3y=0$

33) $(x+2)^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-(x+2)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4(x+2)\dfrac{dy}{dx}+3y=0$

34) Determine la ecuación homogénea de Cauchy-Euler cuya solución general es la familia $Y_h(x)=x^{-2}\left(C_1\mathrm{Cos}\left(3\ln(x)\right)+C_2\mathrm{Sen}\left(3\ln(x)\right)\right)$.

35) Determine la ecuación homogénea de Cauchy-Euler cuya solución general es la familia $Y_h(x)=C_1x^2+C_2x^{-2}+\left(C_3x^2+C_4x^{-2}\right)\ln(x)$.