13 Ecuaciones diferenciales de orden superior
Variación de Parámetros

Variación de parámetros: Sean $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$ una ecuación diferencial lineal de orden n, $Y_h(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ la solución de la ecuación homogénea asociada $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$. El método de variación de parámetros consiste en hallar una solución particular $Y_p(x)$ para la ecuación diferencial no homogénea $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$ que tenga la forma $Y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+\ldots+u_n(x)y_n(x)$.

Método de solución: Para resolver la ecuación diferencial lineal de orden n se siguen los siguientes pasos:

- La ecuación $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$ se escribe de la forma $\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+\frac{a_1(x)}{a_n(x)}\frac{dy}{dx}+\frac{a_0(x)}{a_n(x)}y=\frac{g(x)}{a_n(x)}=f(x)$.
- Se busca la solución $Y_h(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ de la ecuación homogénea asociada $\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+\frac{a_1(x)}{a_n(x)}\frac{dy}{dx}+\frac{a_0(x)}{a_n(x)}y=0$.
- Hallar las funciones $u_1´(x)$, $u_2´(x)$, …, $u_n´(x)$ desde la solución del sistema de ecuaciones: $$\begin{cases} y_1(x)u_1´(x)+y_2(x)u_2´(x)+\ldots+y_n(x)u_n´(x)=0 \\ y_1´(x)u_1´(x)+y_2´(x)u_2´(x)+\ldots+y_n´(x)u_n´(x)=0 \\ y_1´´(x)u_1´(x)+y_2´´(x)u_2´(x)+\ldots+y_n´´(x)u_n´(x)=0 \\ \ldots \\ y_1^{(n-2)}(x)u_1´(x)+y_2^{(n-2)}(x)u_2´(x)+\ldots+y_n^{(n-2)}(x)u_n´(x)=0 \\ y_1^{(n)}(x)u_1´(x)+y_2^{(n)}(x)u_2´(x)+\ldots+y_n^{(n)}(x)u_n´(x)=f(x) \end{cases}$$
- Finalmente, se integran las funciones $u_1´(x)$, $u_2´(x)$, … , $u_n´(x)$, las cuales se requieren para construir la solución particular $Y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+\ldots+u_n(x)y_n(x)$.
- En particular, si $Y_h(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ es la solución de la ecuación homogénea asociada a $\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x)$, y $W(x)$ es el Wronskiano asociado a $y_1(x)$ y $y_2(x)$, entonces para hallar las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ se resuelve el sistema $\begin{cases} y_1u_1´+y_2u_2´=0 \\ y_1´u_1´+y_2´u_2´=f(x) \end{cases}$, del que resultan $u_1(x)=-\int\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx$ y $u_2(x)=\int\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx$.

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

2) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{dy}{dx} = Sec^2(x)$

3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = Sec^4(x)$

4) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{dy}{dx} = Tan(x)Sec(x)$

5) $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{Sen(x)}{e^x}$

6) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{\arctan(x)}{e^{-x}}$

7) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{arc\,sen(x)}{e^{-x}}$

8) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sqrt{x+1}$

9) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + 2y = \ln(x)$

10) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{e^x}{x}$

11) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = xe^x \ln(x)$

12) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}$; $y(\pi) = y'(\pi) = 0.$

13) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{3\sqrt{x+1}}{e^x}$

14) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \dfrac{1}{\sqrt{Sen^5(x)Cos(x)}}$

15) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{Sen^7(x)Cos^8(x)}}$

16) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$

17) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{e^{-x}}{Sen(x)}$

18) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \dfrac{1}{1+Sen(x)}$

19) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

20) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = Sen^4(x)$

21) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{Csc(x)}{e^x}$

22) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

23) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + w^2y = \dfrac{1}{x+1}$; y(1)=2, y´(1)=-3.

24) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

25) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}\ln^2(x)$

26) $3\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 30y = e^x\tan^2(3x)$

27) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\dfrac{dy}{dx} - 4y = \dfrac{Tan(x)}{e^x}$

28) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{x}$

29) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 9\dfrac{dy}{dx} = Tan^2(3x)$

30) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 5\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9\dfrac{dy}{dx} + 5y = \dfrac{2Sec(x)}{e^{2x}}$

31) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 7\dfrac{d^2y}{dx^2} + 14\dfrac{dy}{dx} - 8y = e^{5x}Sen(e^x)$

32) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{2x^3+x^2-4x-6}{x^4}$

33) Hallar la solución general de $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x(x+2)\dfrac{dy}{dx} + (x+2)y = x^3$, si se sabe que $y_1(x)=x$, $y_2(x)=xe^x$ son soluciones particulares de la ecuación homogénea asociada.

34) Hallar la solución general de $(2x+1)(x+1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} - 2y = (2x+1)^2$, si se sabe que $y_1(x)=x$, $y_2(x)=\dfrac{1}{x+1}$ son soluciones particulares de la ecuación homogénea asociada.

35) Hallar la solución general de $Sen^2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2Sen(x)Cos(x)\dfrac{dy}{dx} + (1+Cos^2(x))y = Sen^3(x)$, si se sabe que $y_1(x)=Sen(x)$, $y_2(x)=xSen(x)$ son soluciones particulares de la ecuación homogénea asociada.

36) Hallar la solución general de $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = x\sqrt{x}$, si se sabe que $y_1(x) = \dfrac{Cos(x)}{\sqrt{x}}$, $y_2(x) = \dfrac{Sen(x)}{\sqrt{x}}$ son soluciones particulares de la ecuación homogénea asociada.

37) Hallar la solución general de $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}=x^2$, si se sabe que $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x\ln(x)$, $y_3(x)=x^3$ son soluciones particulares de la ecuación homogénea asociada.

38) Hallar la solución general de $\left(x^4-x^3\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(2x^3-2x^2-x\right)\dfrac{dy}{dx}-y=\dfrac{(x-1)^2}{x}$, si se sabe que $y_1(x)=\dfrac{1}{x}$ es una solución particular de la ecuación homogénea asociada.

39) Hallar la solución general de $4\left(x^2+x\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}+2(2x+1)\dfrac{dy}{dx}-y=2\sqrt{\left(x^2+x\right)}$, si se sabe que $y_1(x)=\sqrt{x+1}$ es una solución particular de la ecuación homogénea asociada.

40) Sea $Y_h(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+C_3y_3(x)$ la solución general de la ecuación homogénea asociada a $\dfrac{d^3y}{dx^3}+P(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\dfrac{dy}{dx}+R(x)y=f(x)$ y $W(x)=W\left[y_1(x),y_2(x),y_3(x)\right]$ el Wronskiano asociado a las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ y $y_3(x)$. Si se imponen las condiciones $\dfrac{du_1}{dx}y_1(x)+\dfrac{du_2}{dx}y_2(x)+\dfrac{du_3}{dx}y_3(x)=0$ y $\dfrac{du_1}{dx}\dfrac{dy_1(x)}{dx}+\dfrac{du_2}{dx}\dfrac{dy_2(x)}{dx}+\dfrac{du_3}{dx}\dfrac{dy_3(x)}{dx}=0$ sobre funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$ y $u_3(x)$ tales que $Y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+u_3(x)y_3(x)$ sea solución particular de la ecuación no homogénea, entonces $u_1(x)=\displaystyle\int\frac{W_1(x)f(x)dx}{W(x)}$, $u_2(x)=-\displaystyle\int\frac{W_2(x)f(x)dx}{W(x)}$ y $u_3(x)=\displaystyle\int\frac{W_3(x)f(x)dx}{W(x)}$, donde $W_1(x)=y_2(x)y_3{}'(x)-y_2{}'(x)y_3(x)$, $W_2(x)=y_1(x)y_3{}'(x)-y_1{}'(x)y_3(x)$ y $W_3(x)=y_1(x)y_2{}'(x)-y_1{}'(x)y_2(x)$.