12 Ecuaciones diferenciales de orden superior No homogéneas de coeficientes constantes

Operadores anuladores: La ecuación diferencial $a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$ se puede escribir como $\left(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right) y = g(x)$, donde $D^k y = \frac{d^k y}{dx^k} =$, y la expresión $L_h = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$ se llama operador diferencial lineal de orden n. De la ecuación $L_h y = g(x)$ se obtiene una ecuación homogénea aplicando a cada lado un operador L_g que anule a la función g(x), es decir, $L_g(g(x)) \bullet L_h(y) = L_g(g(x)) = 0$ es una ecuación homogénea. El operador anulador L_g sólo se puede obtener para los siguientes tipos de funciones:

a) Si $g(x)=P_n(x)$, entonces $L_g\left(P_n(x)\right) = D^{n+1}\left(P_n(x)\right) = 0$.
b) Si $g(x)=e^{ax}P_n(x)$, entonces $L_g\left(e^{ax} \bullet P_n(x)\right) = (D-a)^{n+1}\left(e^{ax} \bullet P_n(x)\right) = 0$.
c) Si $g(x)=e^{ax}P_n(x)[C_1 Cos(bx)+C_2 Sen(bx)]$, entonces el operador anulador es $L_g(g(x))= \left(D^2 - 2abD + a^2 + b^2\right)^{n+1}\left(g(x)\right) = 0$.

Propiedades de los operadores anuladores: Cuatro propiedades importantes de los operadores diferenciales anuladores son:

a) Son lineales, es decir, $L(af(x)+bg(x))=aL(f(x))+bL(g(x))$.
b) Son conmutables, es decir, $L_1L_2=L_2L_1$. Son factorizables, es decir, $L=L_1L_2L_3 \ldots L_n$.
c) Si $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, y los operadores anuladores de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son L_1 y L_2 respectivamente, entonces el operador anulador de f(x) es $MCM(L_1,L_2)$.

Método de solución: El operador anulador de la ecuación diferencial $L_g(g(x)) \bullet L_h(y) = 0$ es un polinomio $P(D) = L_g(D) \bullet L_h(D)$. Con las raíces del polinomio $L_h(D)=0$ se construye la solución general $Y_h(x)$ de la ecuación homogénea $a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$, y con las raíces del polinomio $L_g(D)=0$ se construye la forma general de una solución particular $Y_p(x)$ de la ecuación no homogénea $a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$. Para hallar las constantes de la solución particular Yp(x) se debe resolver la ecuación $a_n \frac{d^n Y_p}{dx^n} + \ldots + a_1 \frac{dY_p}{dx} + a_0 Y_p(x) = g(x)$.

Si $Y_h(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea $a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$, y $Y_p(x)$ es la solución particular obtenida para $a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$, entonces la solución final de la ecuación es $Y(x)=Y_h(x)+Y_p(x)$.

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{dy}{dx}=Cos(x)$

2) $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=Cos^3(x)$

3) $\frac{d^4y}{dx^4}-9\frac{d^2y}{dx^2}=Sen^4(3x)$

4) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+5y=e^{2x}Sen^2(x)$

5) $\frac{d^3y}{dx^3}+4\frac{dy}{dx}=x\left(Sen(x)+Cos(x)\right)^2$

6) $\frac{d^4y}{dx^4}+5\frac{d^2y}{dx^2}+4y=Sen(x)Cos(2x)$

7) $\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^2y}{dx^2}+y=2e^x-x$; $y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=2,\ y'''(0)=3.$

8) $\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}-4y=4e^xCos(x)$

9) $\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+2y=2e^{-x}-xe^{-2x}$

10) $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-5y=e^xSen(2x)$

11) $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=e^{3x}Sen(2x)Cos(4x)$

12) $\frac{d^3y}{dx^3}+6\frac{d^2y}{dx^2}+9\frac{dy}{dx}=xSen(3x)Sen(6x)$

13) $\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-2y=8xe^x$

14) $\frac{d^4y}{dx^4}+9\frac{d^2y}{dx^2}=Cos(3x)+xSen(3x)$

15) $\frac{d^5y}{dx^5}+9\frac{d^3y}{dx^3}=xSen(3x)+e^xCos(3x)$

16) $\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-3y=e^x\left(1+Cos(x)\right)$

17) $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=4xCosh^2\left(\frac{x}{2}\right)$

18) $\frac{d^4y}{dx^4}+20\frac{d^2y}{dx^2}+64y=Sen(2x)+Sen(4x)$

19) $\frac{d^4y}{dx^4}+20\frac{d^2y}{dx^2}+64y=Cos(x)Cos(3x)$

20) $\frac{d^5y}{dx^5}-4\frac{d^3y}{dx^3}=x^2Cosh(2x)$