11 Ecuaciones diferenciales de orden superior Homogéneas de coeficientes constantes

Ecuación auxiliar: Como una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes $a\frac{dy}{dx}+by=0$ tiene una solución de la forma $y(x)=e^{mx}$, donde $m=-b/a$, entonces se tratará de construir una solución para una ecuación homogénea de coeficientes constantes de orden superior que tenga esta misma forma. Al sustituir $y=e^{mx}$ y sus derivadas en la ecuación diferencial $a_n\frac{d^ny}{dx^n}+\ldots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=0$ se obtiene la ecuación auxiliar $P(m)=a_nm^n+\ldots+a_2m^2+a_1m+a_0=0$. Se estudiarán las raíces de esta ecuación auxiliar para una ecuación diferencial de segundo orden.

Forma de la solución general: La ecuación $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$ tiene una ecuación auxiliar de la forma $P(m)=am^2+bm+c=0$. La forma general de la solución de la ecuación diferencial depende del tipo de raíces de la ecuación auxiliar, y estas dependen del signo del discriminante $D=b^2-4ac$.

Caso 1: Si $D>0$, entonces las raíces $m=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ son reales diferentes m_1 y m_2, y la solución de la ecuación será $Y(x)=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}$.

Caso 2: Si $D=0$, entonces las raíces $m=-\frac{b}{2a}$ son reales iguales. La primera solución será $y_1(x)=e^{mx}$. La segunda solución será $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1(x)^2}dx=e^{mx}\int\frac{e^{-\int\frac{b}{a}dx}}{e^{2mx}}dx=xe^{mx}$. Así la solución general será $Y(x)=C_1e^{mx}+C_2xe^{mx}$.

Caso 3: Si $D<0$, entonces las raíces $m=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\alpha\pm\beta i$ son complejas. Las soluciones serán $y_1(x)=e^{(\alpha+\beta i)x}$ y $y_2(x)=e^{(\alpha-\beta i)x}$. La fórmula de Euler $e^{\theta i}=Cos(\theta)+iSen(\theta)$, el principio de superposición y la fórmula de D´Alembert $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1(x)^2}dx$ permiten llegar a la solución general $Y(x)=e^{\alpha x}\left(C_1Cos(\beta x)+C_2Sen(\beta x)\right)$.

Si la ecuación es de orden superior a 2, se generalizan y se combinan los tres casos.

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $2\frac{d^4y}{dx^4}+3\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{dy}{dx}-2y=0$

2) $\frac{d^{10}y}{dx^{10}}-211\frac{d^5y}{dx^5}-7776y=0$

3) $\frac{d^4y}{dx^4}+4\frac{d^3y}{dx^3}+5\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=0$

4) $\frac{d^5y}{dx^5}-\frac{d^4y}{dx^4}-3\frac{d^3y}{dx^3}+5\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=0$

5) $\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}-7\frac{d^2y}{dx^2}+18\frac{dy}{dx}-18y=0$

6) $\frac{d^5y}{dx^5}+5\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}-10\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+5y=0$

7) $\frac{d^8y}{dx^8}-30\frac{d^6y}{dx^6}+273\frac{d^4y}{dx^4}-820\frac{d^2y}{dx^2}+576y=0$

8) $\frac{d^6y}{dx^6}-2\frac{d^5y}{dx^5}+9\frac{d^4y}{dx^4}-16\frac{d^3y}{dx^3}+24\frac{d^2y}{dx^2}-32\frac{dy}{dx}+16y=0$

9) $\frac{d^6y}{dx^6}+4\frac{d^5y}{dx^5}+10\frac{d^4y}{dx^4}+20\frac{d^3y}{dx^3}+25\frac{d^2y}{dx^2}+16\frac{dy}{dx}+4y=0$

10) $\frac{d^7y}{dx^7}+5\frac{d^6y}{dx^6}+15\frac{d^5y}{dx^5}+3\frac{d^4y}{dx^4}-33\frac{d^3y}{dx^3}-21\frac{d^2y}{dx^2}+17\frac{dy}{dx}+13y=0$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, usando el teorema de D´Moivre para resolver la ecuación auxiliar:

11) $\frac{d^4y}{dx^4}+64y=0$

12) $\frac{d^6y}{dx^6}+64y=0$

13) $\frac{d^8y}{dx^8}-y=0$

14) $\frac{d^{12}y}{dx^{12}}+y=0$

15) $\frac{d^{14}y}{dx^{14}}+\frac{d^8y}{dx^8}-\frac{d^6y}{dx^6}-y=0$

Resolver los siguientes problemas:

16) Si tres de las raíces de la ecuación auxiliar de una ecuación de orden 6 son $m=2+3i$, $m=3+2i$ y $m=1+3i$, ¿Cuál es la ecuación diferencial?

17) Si la solución general de una ecuación diferencial homogénea de quinto orden es $Y(x)=e^{-2x}\left(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5x^4\right)$, ¿Cuál es la ecuación diferencial?

18) Si la solución general de una ecuación diferencial homogénea de cuarto orden es $Y(x) = e^{-2x}\left(C_1 Cos(3x) + C_2 Sen(3x)\right) + e^{2x}\left(C_3 Cos(2x) + C_4 Sen(2x)\right)$, ¿Cuál es la ecuación diferencial?

19) Si la ecuación auxiliar de una ecuación diferencial tiene las raíces $m_1 = \frac{2}{3}$ de multiplicidad 3, y $m_2 = -\frac{3}{2}$ de multiplicidad 2, ¿Cuál es la ecuación diferencial?

20) Si la solución general de una ecuación diferencial homogénea de cuarto orden es $Y(x) = e^{2x}\left(C_1 Cos(3x) + C_2 Sen(3x)\right) + xe^{2x}\left(C_3 Cos(3x) + C_4 Sen(3x)\right)$, ¿Cuál es la ecuación diferencial?