10 Ecuaciones diferenciales de orden superior
Teoría Preliminar

Ecuación lineal de orden superior: Una ecuación diferencial ordinaria de orden superior tiene la forma $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$.

En particular, la ecuación de segundo orden es $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$ y se puede escribir como $\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x)$. Si R(x)=0, la ecuación es homogénea.

Determinante Wronskiano: Si y_1, y_2, …, y_n son n funciones que poseen al menos n-1 derivadas, el determinante Wronskiano se define como**:**

$$W(y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x))=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ & \cdots & \cdots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Independencia: Sean y_1, y_2, …, y_n n soluciones de $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ en un intervalo I. Entonces, el conjunto de soluciones es linealmente independiente en I si y solo si $W(y_1,y_2,\ldots,y_n)\neq 0$ para todo x en el intervalo I.

Principio de superposición: Sean y_1, y_2, …, y_n soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n. La combinación lineal $Y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)$, ($c_k\in\mathbb{R}$), también es una solución.

Conjunto fundamental de soluciones:

Sean $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ una ecuación diferencial homogénea de orden n, y $B=\{y_k(x):y_k(x)\text{ es solución de la E.D.H, }k=1,2,\ldots,n\}$, entonces:

- Las funciones $y_k(x)$ son linealmente independientes y por tanto se puede comprobar que B es una base para el espacio vectorial gen(B)= $\{c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x):c_k\in R\}$.
- $Y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea de orden n $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$.
- $Y(x)=Y_h(x)+Y_p(x)$ es la solución general de la ecuación diferencial no homogénea $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$, donde $Y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$.

Problema de valores iniciales: Para una ecuación diferencial lineal de orden n, un problema de valores iniciales de orden n es:

Resolver: $a_n(x)\dfrac{d^ny}{dx^n}+\dots+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$.

Sujeta a: $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$, …, $y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$.

Problema de valores en la frontera: Para una ecuación diferencial lineal de orden n, un problema de valores en la frontera es:

Resolver: $a_n(x)\dfrac{d^ny}{dx^n}+\dots+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$.

Sujeta a: $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$, …, $y(x_{n-1})=y_{n-1}$.

Este problema significa que se debe hallar la solución particular cuya gráfica pasa por los puntos (x_0,y_0), (x_1,y_1) …,(x_{n-1},y_{n-1}).

Construcción de la segunda solución: Sea $a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ una ecuación lineal homogénea de orden 2, la cual se puede escribir como $\dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)y=0$, y sea $y_1=y_1(x)$ una solución conocida, entonces la segunda solución se obtiene haciendo $y_2(x)=y_1(x)\int\dfrac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1(x)^2}dx$. Esta fórmula se atribuye a Jean le Rond D´Alembert.

Ejercicios

1) Sean y_1, y_2, …, y_n n funciones que poseen al menos n-1 derivadas. Si el determinante $W(y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x))=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ & \cdots & \cdots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ es diferente de cero por lo menos en un punto del intervalo I, entonces las funciones y_1, y_2, …, y_n son linealmente independientes en el intervalo I.

2) Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuación $a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ en un intervalo I, entonces la combinación lineal $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ también es una solución en el intervalo I.

3) Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuación $a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ en un intervalo I, entonces el conjunto de soluciones es linealmente independiente en I si y solo si $W(y_1(x),y_2(x))\neq 0$ para todo x en el intervalo I.

4) Sea $C=\{y_1(x),y_2(x)\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación $a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ en un intervalo I. Si Y(x) es una solución de la ecuación en I, entonces es posible encontrar constantes c_1 y c_2 tales que $Y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$.

5) Sea $y_p(x)$ una solución de la ecuación $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$ en un intervalo I, y sea C={$y_1(x)$,$y_2(x)$} un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$ en el intervalo I. Entonces para cualquier solución Y(x) en I de la ecuación $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$ es posible encontrar constantes c_1 y c_2 tales que $Y(x)= c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_p(x)$.

6) Determine si las siguientes son linealmente independientes en $-\infty < x < \infty$:

a) $f_1(x)=x^2+x$, $f_2(x)=x+1$, $f_3(x)=x^2+1$.
b) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\text{Sen}^2(x)$, $f_3(x)=\text{Cos}^2(x)$.
c) $f_1(x)=e^{2x}$, $f_2(x)=e^{3x}$, $f_3(x)=e^{4x}$.
d) $f_1(x)=\text{Senh}(2x)$, $f_2(x)=\text{Cosh}(3x)$, $f_3(x)=e^x$.
e) $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x\ln(x)$, $f_3(x)=x^2\ln(x)$.

7) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial dada, si se conoce una solución $y_1(x)$:

a) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+5y=0$, $y_1(x)=x^2\text{Cos}(\ln(x))$.
b) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-5x\frac{dy}{dx}+9y=0$, $y_1(x)=x^3\ln(x)$.
c) $x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-2x)\frac{dy}{dx}+(x-1)y=0$, $y_1(x)=e^x$.
d) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$, $y_1(x)=\text{Cos}(\ln(x))$.
e) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+2y=0$, $y_1(x)=x\text{Sen}(\ln(x))$.

8) Hallar la solución general de la ecuación $x\frac{d^2y}{dx^2}-2(x+1)\frac{dy}{dx}+(x+2)y=0$, x>0, sabiendo que tiene una solución de la forma $y=e^{mx}$.

9) Hallar la solución general de la ecuación $4x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}-y=0$, sabiendo que existe una solución particular de la forma $y=x^m$, para x>0.

10) Hallar la solución general de $(\text{Cos}(x)-\text{Sen}(x))\frac{d^2y}{dx^2}+(2\text{Sen}(x))\frac{dy}{dx}-(\text{Sen}(x)+\text{Cos}(x))=0$, si se conoce la solución $y_1(x)=e^x$.

11) Hallar la solución general de $(\text{Cos}(x)-\text{Sen}(x))\frac{d^2y}{dx^2}+(2\text{Sen}(x))\frac{dy}{dx}-(\text{Sen}(x)+\text{Cos}(x))y=0$ si se conoce la solución $y_1(x)=e^x$.

12) Hallar la solución general de $\operatorname{Cos}(x)\left(1+\operatorname{Sen}(x)\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\operatorname{Sen}(x)\right)\frac{dy}{dx}+\left(\operatorname{Sen}(x)\operatorname{Cos}(x)\right)y=0$, si se conoce la solución $y_1(x)=\operatorname{Sen}(x)$.

13) Hallar la solución general de $\left(x^3\ln(x)-x^3\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x^2\frac{dy}{dx}+xy=0$, si se conoce la solución $y_1(x)=\ln(x)$.

14) Hallar la solución general de $\left(1-\ln(x)\right)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}=0$, si se conoce la solución $y_1(x)=x$.

15) Hallar la solución general de $\left(x^2-2x\right)\frac{d^2y}{dx^2}-\left(2-x^2\right)\frac{dy}{dx}-2\left(1-x\right)y=0$, si se conoce la solución $y_1(x)=x^2$.

16) Hallar la solución general de $\left(2x^2+1\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(4x^2-2\right)\frac{dy}{dx}-\left(4x^2-2\right)y=0$, si se conoce la solución $y_1(x)=e^{-x^2}$.

17) Hallar la solución general de $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{1-x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{9}{1-x^2}y=0$, si una solución particular es un polinomio de tercer grado.

18) Hallar la solución general de $\frac{d^3y}{dx^3}-3a\frac{d^2y}{dx^2}+3a^2\frac{dy}{dx}-a^3y=0$, si una solución particular es $y_1(x)=e^{ax}$.

19) Hallar la solución general de $x^3\frac{d^3y}{dx^3}-3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+7x\frac{dy}{dx}-8y=0$, si una solución particular es $y_1(x)=x^2$.

20) Para cada una de los siguientes problemas se da una ecuación diferencial, su solución general y valores iniciales o valores de frontera. Hallar la solución que satisface las condiciones dadas.

a) $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}-2y=0$; $y(x)=C_1e^x+e^{-x}\left(C_2\operatorname{Cos}(x)+C_3\operatorname{Sen}(x)\right)$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$.

b) $\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^2y}{dx^2}+y=2e^x-x$; $y(x)=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}+\left(C_3+C_4x\right)e^x-x+\frac{1}{4}x^2e^x$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$, $y'''(0)=3$.

c) $\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}-4y=0$; $y(x)=C_1e^{2x}+e^x\left(C_2\operatorname{Cos}(x)+C_3\operatorname{Sen}(x)\right)$; $y(0)=-1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$.

d) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=\ln(x)$; $y(x)=2+C_1x+\left(C_2x+1\right)\ln(x)$; $y(1)=3$, $y(e)=3$.

e) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+2y=x^2\ln(x)$; $y_1(x)=x\left(C_1\operatorname{Cos}\left(\ln(x)\right)+C_2\operatorname{Sen}\left(\ln(x)\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\ln(x)-1\right)x^2$; $y\left(e^{\pi}\right)=0$, $y\left(e^{-\pi}\right)=e^{\pi}$.