8 Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden
Campos de pendientes y Aplicaciones

1. Campo direccional

Campo direccional:
La terna (x,y,y´) determina la dirección de una recta que pasa por el punto (x,y). El conjunto de los segmentos de estas rectas es la representación geométrica del campo direccional, también llamado campo de pendientes o campo de elementos lineales de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. La instrucción DIRECTION_FIELD(f(x,y), x, x_1, x_2, Px, y, y_1, y_2, Py) del programa **Derive** muestra el campo de pendientes para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ en el rectángulo $[x_1, x_2] x [y_1, y_2]$, mostrando Px•Py segmentos.

Isoclinas:
Las curvas que atraviesan segmentos de pendientes idénticas se llaman isoclinas, es decir, las isoclinas son elementos de la familia f(x,y) = c.

Ejercicios

Para las ecuaciones de 81 a 90, trazar los campos direccionales:

81) $\frac{dy}{dx} = xy$

82) $\frac{dy}{dx} = (y-1)x$

83) $\frac{dy}{dx} = x - y$

84) $\frac{dy}{dx} = ye^x$

85) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

86) $\frac{dy}{dx} = y(x+2)$

87) $\frac{dy}{dx} = 2y(x+y)$

88) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$

89) $\frac{dy}{dx} = 3x - y$

90) $\frac{dy}{dx} = y^2 + x^2$

En las ecuaciones de 91 a 100, determinar las isoclinas:

91) $\frac{dy}{dx} = 3x + 2y$

92) $\frac{dy}{dx} = y + x^2$

93) $\frac{dy}{dx} = y - x^2$

94) $\frac{dy}{dx} = \text{Cos}(x-y)$

95) $\frac{dy}{dx} = y^2 + x^2$

96) $\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$

97) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$

98) $\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 9y^2$

99) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x-2}$

100) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$

2. Aplicaciones

Trayectorias ortogonales:
Se llaman trayectorias ortogonales a curvas que se intersecan formando un ángulo recto. Si la ecuación diferencial de una familia de curvas es $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, entonces la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales es de la forma $F\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0$.

Trayectorias isogonales:
Una familia G de curvas que se interseca con otra familia F de curvas formando un ángulo $\theta \neq 90^o$ se llama familia isogonal. La familia G conforma las trayectorias isogonales de la familia F. Si $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ es la ecuación diferencial de una familia F, entonces la ecuación diferencial de la familia isogonal G es $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) \pm \tan\theta}{1 \mp f(x, y)\tan\theta}$.

Crecimiento de Población y Desintegración Radiactiva:
El modelo $\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \ ; \ P(t_0) = P_0 \end{cases}$, donde k es una constante, representa la rapidez con que crece en cada instante t una población de bacterias o de especies pequeñas, la cual es proporcional a la población presente en el instante t. La condición $P(t_0)=P_0$ se usa para hallar la constante de proporcionalidad k.

El mismo modelo permite estimar la cantidad C(t) restante de una sustancia radiactiva que se desintegra a medida que transcurre el tiempo. La velocidad con que se desintegra cierta cantidad de sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad presente en el tiempo t, es decir, $\frac{dC}{dt} = kC(t)$, $C(t_0) = C_0$ es la cantidad en un instante t_0 dado.

Enfriamiento:
La Ley de enfriamiento de Newton dice: En un cuerpo que se está enfriando, la rapidez con que la temperatura T(t) cambia es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura T_0 del medio que lo rodea. Es decir, $\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_0\right)$.

Circuitos:
La segunda Ley de Kirchhoff establece que: En un circuito LR en serie que contiene un resistor y un inductor, la suma de las caídas de voltaje a través del inductor $L\frac{di}{dt}$ y del resistor iR es igual al voltaje E(t) aplicado al circuito. Es decir, $L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$, donde L es la inductancia, R es la resistencia, i(t) es la corriente o respuesta del sistema.

Análogamente, para un circuito RC en serie, se tiene que la caída de voltaje a través de un capacitor de capacitancia C es q(t)/C, donde q es la carga del capacitor: por lo tanto, la segunda ley de Kirchhoff establece $Ri + \frac{1}{C}q = E(t)$, pero la corriente i(t) y la carga q(t) se relacionan mediante i=dq/dt, transformándose $Ri + \frac{1}{C}q = E(t)$ en $R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$.

Mezclas:
Al mezclar dos soluciones salinas con distintas concentraciones, la cantidad de sal que contiene la mezcla en cada instante se puede modelar con una ecuación diferencial de primer orden. Si X(t) representa la cantidad de sal en un recipiente en cualquier momento t, la rapidez con que cambia X(t) es la tasa neta $\frac{dX}{dt} = T_E - T_S$, donde T_E es la tasa de entrada de la sustancia (Cantidad de galones de sustancia que entran por minuto, por concentración de la sustancia que entra en libras por galón) y T_S es la tasa de salida de la sustancia (Cantidad de galones de sustancia que salen por minuto, por concentración de la sustancia que sale en libras por minuto = Cantidad de sal presente dividido por cantidad de agua presente).

Ejercicios

En los problemas 1 a 20, encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dada:

1) $4x + 5y = c$
2) $y = cx^2$
3) $cx^2 + y^2 = 1$
4) $2x^2 + y^2 = c$
5) $y^m = cx^m$, m y n fijos.
6) $e^x Cos(y) = c$
7) $y = \frac{x}{1+cx}$
8) $y = \frac{1}{c+x}$
9) $y^3 + 3x^2y = c$
10) $2x^2 + y^2 = 4cx$
11) $y = \frac{1+cx}{1-cx}$
12) $y = \frac{c}{1+x^2}$
13) $y = \ln(\, c + \tan(x)\,)$
14) $y = \frac{1}{\ln(cx)}$
15) $y^3 + 3x^2y = c$
16) $y = cSen(x)$
17) $x^n + y^n = c$, $n \neq 2$.
18) $y = ce^x - (x+1)$
19) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = c$
20) $Sen(y) = ce^{-x}$

En los problemas 21 a 20, encuentre la familia G de trayectorias isogonales de la familia F que forman entre sí el ángulo q dado:

21) $y^2 = c(2x+c)$, $\theta = 45º$.
22) $\frac{x^2}{C+1} + \frac{y^2}{C} = 1$, $\theta = 30º$.
23) $y^2 + x^2 = Cx$, $\theta = 60º$.
24) $(2C - x)y^2 = x^3$, $\theta = 45º$.
25) $y = e^{Cx}$, $\theta = 30º$.
26) $y = x + Ce^{-x}$, $\theta = 60º$.
27) $Cos(y) = Ce^{-x}$, $\theta = 45º$.
28) $y = \frac{c}{1+x^2}$, $\theta = 30º$.
29) $y = \frac{x}{1+cx}$, $\theta = 60º$.
30) $y = \frac{1}{c+x}$, $\theta = 45º$.

Plantear y resolver una ecuación diferencial de primer orden para los problemas de 31 a 40:

31) Se sabe que la población de cierta comunidad crece proporcionalmente a la cantidad de personas presentes en cualquier momento. Si la población se duplicó en 6 años, ¿En cuánto tiempo se triplicará y se cuadruplicará la población?

32) En cualquier instante, la cantidad de bacterias en un cultivo crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Si a las 3 horas hay 400 bacterias y a las 10 horas hay 2000 bacterias, ¿Cuántas bacterias habían inicialmente?

33) 100 miligramos de una sustancia radiactiva disminuyen en un 3% al transcurrir 6 horas. Si la razón de desintegración en cualquier momento es proporcional a la cantidad de sustancia presente, ¿cuál es la cantidad que queda después de 2 horas.´´

34) Cierto isótopo radiactivo del plomo se desintegra con una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier instante t y esta cantidad se reduce a la mitad en 3.3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿Cuánto tiempo debe pasar para que se desintegre el 90%?

35) Un termómetro se encuentra en una habitación, en donde la temperatura del aire es 70ºF, se lleva al exterior, en donde la temperatura es 10ºF. Al transcurrir medio minuto el termómetro indica 50ºF. ¿Cuándo indica el termómetro al final de un minuto? ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el termómetro llegue a los 15ºF?

36) Un termómetro se lleva del interior de un recinto al exterior del mismo, en donde la temperatura del aire es de 5ºF. Al minuto el termómetro indica una temperatura de 55ºF y a los cinco minutos señala 30ºF. ¿Cuál era la temperatura del recinto interior?

37) Se aplica una fuerza electromotriz de 30 v a un circuito en serie LR con 0,1 h de inductancia y 50 Ω de resistencia. Determine la corriente i(t), si i(0) = 0.

38) Se aplica una fuerza electromotriz de 200 v a un circuito en serie RC, en que la resistencia es 1000 Ω y la capacitancia es de $5x10^{-6}$ f. Determinar la carga q(t) del capacitor, si i(0) = 0,4 amp. Halle la carga cuando $t \to \infty$.

39) Un tanque mezclador contiene 500 galones de agua en los cuales se han disuelto 75 libras de sal. Otra solución salina se bombea al tanque a razón de 5 galones por minuto. El contenido se agita cuidadosamente y la mezcla resultante es desalojada a la misma tasa. La concentración de la solución salina que entra es 2.5 libras por galón. Calcule la cantidad de sal presente cuando han transcurrido 20 minutos.

40) Un tanque mezclador contiene 600 galones de agua en los cuales se han disuelto 100 libras de sal. Otra solución salina se bombea al tanque a razón de 6 galones por minuto. El contenido se agita cuidadosamente y la mezcla resultante es desalojada a razón de 4 galones por minuto. La concentración de la solución salina que entra es 3 libras por galón. Calcule la cantidad de sal presente cuando han transcurrido 20 minutos.