6 Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden
Ecuaciones Especiales

Ecuación de Bernoulli:

Es una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$, con $n\neq 0,1$. Para resolver ésta ecuación se hace la sustitución $w=y^{1-n}$, desde aquí se resuelve como ecuación lineal.

Ecuación de Lagrange:

Es una ecuación de la forma $y = x\phi(y') + \varphi(y')$. Para resolverla se hace la sustitución $y'=p$ o $dy=pdx$, luego se diferencia, se simplifica y se resuelve la ecuación lineal resultante. La solución será las ecuaciones paramétricas $x=x(p)$ e $y=y(p)$.

Ecuación de Clairaut:

Es una ecuación de la forma $y = xy' + \varphi(y')$. Para resolverla se hace la sustitución $y'=p$ o $dy=pdx$, luego se diferencia, se simplifica y se resuelve la ecuación lineal resultante. La solución será de la forma $y=cx+\phi(c)$. También puede obtenerse una solución singular eliminando el parámetro p de las ecuaciones $x=\alpha(p)$ e $y=xp+\beta(p)$. La solución singular es la envolvente de la solución $y=cx+\phi(c)$.

Ecuación de Ricatti:

Es una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx}=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2$. Para resolverla se hace la sustitución $y = y_1 + u(x)$, donde y_1 es una solución particular conocida, u(x) será una solución uniparamétrica, con esta sustitución la ecuación de Ricatti se convierte en una ecuación de Bernoulli.

Ejercicios

1) $\frac{dy}{dx}+xy=xe^{-x^2}y^{-3}$

2) $xy^2\frac{dy}{dx}+y^3=x\ln(x)$

3) $\left(3y+3xe^xy^{2/3}\right)dx+xdy=0$

4) $x\frac{dy}{dx}=2x^2y+y\log(y)$

5) $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$

6) $x\frac{dy}{dx}+y=y^2\ln(x)$

7) $\frac{dy}{dx}-y=x^3\sqrt[3]{y}$

8) $y\frac{dy}{dx}-2y^2=e^x$

9) $\left(y^2-\log(x)\right)dx+xy^3dy=0$

10) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{3}=\frac{(1-2x)y^4}{3}$

11) $\frac{dy}{dx}+y=y^2\left(\mathrm{Cos}(x)-\mathrm{Sen}(x)\right)$

12) $xdy - \left(y + xy^3(1+\ln(x))\right)dx = 0$

13) $6y^2dx - x(2x^3+y)dy = 0$

14) $3\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}=2xy\left(y^3-1\right)$

15) $\frac{dy}{dx} - y = -y^2\left(x^2 + x + 1\right)$

16) $3y^2\text{Cos}(x)\frac{dy}{dx} - y^3\text{Sen}(x) = e^{\text{Sen}(x)}\text{Cos}(x)$

17) $\left(\sqrt{x}\text{Sen}\sqrt{x} + y^3\right) + 6xy^2\frac{dy}{dx} = 0$

18) $3\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\left(\frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}\right) = \frac{x}{y^2}\left(\frac{3x^2 - a^2}{x^2 - a^2}\right)$

19) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{2}{3}(xy)^4$

20) $y = \left(\frac{dy}{dx} - 1\right)x + a\frac{dy}{dx} + b$

21) $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1$

22) $y = 2x\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} + 1$

23) $y = \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

24) $y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

25) $2y = x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}\ln\left(\frac{dy}{dx}\right)$

26) $y = 2x\frac{dy}{dx} + \text{Sen}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

27) $y = \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

28) $y = \frac{3}{2}x\frac{dy}{dx} + e^{\frac{dy}{dx}}$

29) $y = x\frac{dy}{dx} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-2}$

30) $x\frac{dy}{dx} - y = \ln\left(\frac{dy}{dx}\right)$

31) $x = y\left(y^{-1/2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}\right)$

32) $x = y\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-2}$

33) $y = x\frac{dy}{dx} + \left(1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}$

34) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} + 1 = 0$

35) $\frac{dy}{dx}\ln\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2y - x\frac{dy}{dx}$

36) $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dy}{dx}$

37) $y = x\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dy}$

38) $y = x\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

39) $\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2$

40) $y = 3x\frac{dy}{dx} + 6y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

41) $\frac{dy}{dx} = \ln\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)$

42) $y = x\frac{dy}{dx} + a\sqrt[3]{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$

43) $x = y\left(\sqrt{\frac{dx}{dy}} - \frac{dx}{dy}\right)$

44) $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}\ln\left(\frac{dy}{dx}\right)$

45) $\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\left(y\frac{dy}{dx} + x\right) = 2\frac{dy}{dx}$

46) $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2(xy - 2)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$

47) $y = x\frac{dy}{dx} - \text{Sen}\left(\frac{dy}{dx}\right)\text{Cos}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

48) $\frac{dy}{dx} = 1 - x - y + xy^2; \quad y_1(x) = 1$

49) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^3(y - x)^2; \quad y_1(x) = x$

50) $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2; \quad y_1(x) = \frac{2}{x}$

51) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - y = \dfrac{2y^2}{x^3} - x^2; \\ y_1(x) = x^2 \end{cases}$

52) $\dfrac{dy}{dx}(2y - 2xy - x + 2) + y^2 + y = x(2 - x)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

53) $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + \dfrac{y}{x} - 2y^2; \quad y_1(x) = x$

54) $\dfrac{dy}{dx} + 4 - 3y - y^2 = 0; \quad y_1(x) = 1$

55) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1; \quad y_1(x) = x$

56) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1 + x^2 + y^2; \quad y_1(x) = x$

57) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + \left(1 + 2e^x\right)y + y^2; \\ y_1(x) = -e^x \end{cases}$

58) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \mathrm{Sec}^2(x) - y\mathrm{Tan}(x) + y^2; \\ y_1(x) = \mathrm{Tan}(x) \end{cases}$

59) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\mathrm{Cos}^2(x) - \mathrm{Sen}^2(x) + y^2}{2\mathrm{Cos}(x)}; \\ y_1(x) = \mathrm{Sen}(x) \end{cases}$

60) $\begin{cases} \mathrm{Cos}^2(y)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \dfrac{\mathrm{Cos}(y)\mathrm{Sen}(2x)}{2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \\ \mathrm{Sen}(y)\mathrm{Cos}^2(x) \end{cases}$