5 Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden Factores Integrantes

Definición:

La ecuación $a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_n(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_n(x)\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_1(x)\dfrac{d^1 y}{dx^1} + a_0(x)y = g(x)$ es una ecuación diferencial lineal de orden n. En particular, una ecuación lineal de primer orden es de la forma $a_1(x)\dfrac{d^1 y}{dx^1} + a_0(x)y = g(x)$ o $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$.

Factores Integrantes:

La expresión $\mu(x,y)$ es un factor integrante de la ecuación diferencial no exacta $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ en una región R, si la ecuación diferencial $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$ es exacta en la región R.

1. Si $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ se puede expresar como $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, entonces su factor integrante es $\mu(x)= e^{\int P(x)dx}$.
2. Si $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ se puede expresar como $\dfrac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$, entonces su factor integrante es $\mu(x)= e^{\int P(y)dy}$.

Los factores integrantes se pueden presentar en términos de x, en términos de y, o en términos de xy. Algunas reglas para hallar factores integrantes son las siguientes:

a) Si $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} = f(x)$, entonces la expresión $\mu(x)= e^{\int P(x)dx}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

b) Si $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)} = f(y)$, entonces la expresión $\mu(y)= e^{\int P(y)dy}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

c) Si $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es homogénea y $xM(x,y)+yN(x,y)\neq 0$, entonces la expresión $\dfrac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}$ es un factor integrante de $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

d) Si $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es de la forma $yP(x,y)dx + xQ(x,y)dy = 0$ y $P(x,y) \neq Q(x,y)$, entonces $\dfrac{1}{xM(x,y)-yN(x,y)}$ es un factor integrante de $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

e) Si $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es de la forma $x^m y^n (Aydx + Bxdy) + x^p y^q (Cydx + Dxdy) = 0$, entonces $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ tiene un factor integrante de la forma $x^\alpha y^\beta$.

f) Si las funciones M(x,y) y N(x,y) satisfacen las ecuaciones de Cauchy –Riemann en cierta región del plano XY , de modo que $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$ y $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}$, entonces $\frac{1}{M^2(x,y)+N^2(x,y)}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial M(x,y)dx+N(x,y)dy=0.

g) Si la expresión $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ puede expresarse de la forma M(x,y)Y(y) – N(x,y)X(x), entonces la ecuación M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y)$ = g(x)h(y), en donde $g(x) = e^{-\int X(x)dx}$ y $h(y) = e^{-\int Y(y)dy}$.

Ejercicios

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xSen(y) + 2Sen(2y)}$

2) $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = f(x) = \begin{cases} 2x^3 - x, & \text{si } 0 < x < 1 \\ x\ln(x) + 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

3) $(1+x)\frac{dy}{dx} - 2y - x(1+x)e^x = 0$

4) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = xe^{-x}$, con $P(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 - \frac{1}{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

5) $\left(1 - x^2\right)\frac{dy}{dx} = 1 - xy - 3x^2 + 2x^4$

6) $Cos^2(x)Sen(x)dy + \left(yCos^3(x) - 1\right)dx = 0$

7) $x\frac{dy}{dx} + (1+x)y = e^{-x}Sen(2x)$

8) $\left(x^2 + x\right)dy = \left(x^5 + 3xy + 3y\right)dx$

9) $xdy + \left(xy + 2y - 2e^{-x}\right)dx = 0$

10) $\left(x^2 + y^2 + x\right)dx + xydy = 0$

11) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^4e^y + 2xy^3 + y}{x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x}$

12) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y}{2y^3 + 2x^2y + 2x}$

13) $y\left(x^2y^2 + 2\right)dx + x\left(2 - 2x^2y^2\right)dy = 0$

14) $y(2xy + 1)dx + x\left(1 + 2xy - x^3y^3\right)dy = 0$

15) $ydx + x\left(1 - 3x^2y^2\right)dy = 0$

16) $xdx + ydy + 4y^3\left(x^2 + y^2\right)dy = 0$

17) $xdy - ydx - (1-x^2)dx = 0$

18) $(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dx + ydy = 0$

19) $2xy\log(y)dx + \left(x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy = 0$

20) $\left(y + xy^2\right)dx + \left(x - x^2y\right)dy = 0$

21) $\frac{dy}{dx} + yCos(x) = e^{-Sen(x)}$

22) $ye^{x/y}dx + \left(y - xe^{x/y}\right)dy = 0$

23) $\left(x^4Cos(x) + 2y^2x\right)dx - 2x^2ydy = 0$

24) $\left(x - Sen\sqrt{y}\right)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

25) $\left(3xy^2+x^3\right)\dfrac{dy}{dx}+\left(1-2y^3\right)=0$

26) $\left(y^2+2xy-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}+\left(x^2+2xy-y^2\right)=0$

27) $2x\dfrac{dy}{dx}Cos(x)=xySen(x)-2yCos(x)$

28) $\left(2y+3x^2y^3\right)dx+\left(3x+5x^3y^2\right)dy=0$

29) $2e^x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)dx+2\left(\dfrac{y}{x}e^y-e^x\right)dy=0$

30) $Cos(y)dy-\left(Cos(x)Sen^2(y)+Sen(y)\right)dx=0$

31) $x(4ydx+2xdy)+y^3(3ydx+5xdy)=0$

32) $\left(y\ln(y)+ye^x\right)dx+\left(x+yCos(y)\right)dy=0$

33) $(8ydx+8xdy)+x^2y^3(4ydx+5xdy)=0$

34) $x^3y^3(2ydx+xdy)-(5ydx+7xdy)=0$

35) $2Cos(y)\dfrac{dy}{dx}+Sen(y)=x^2Csc(y)$

36) $(y+x^3y+2x^2)dx+(x+4xy^4+8y^3)dy=0$

37) $y\ln(y)dx+(x-\ln(y))dy=0$

38) $\dfrac{dy}{dx}-2yCtg(2x)=1-2xCtg(2x)-2Csc(2x)$

39) $(4xy^2+6y)dx+(5x^2y+8x)dy=0$

40) $(3y^2-x)dx+2y(y^2-3x)dy=0$

41) $\dfrac{dy}{dx}=-2x+2\left(x^2+y-1\right)^{2/3}$

42) $(8x^2y^3-2y^4)dx+(5x^3y^2-8xy^3)dy=0$

43) $y(2x^2y^3+3)dx+x(x^2y^3-1)dy=0$

44) $(2x+Tan(y))dx+(x-x^2Tan(y))dy=0$

45) $(7x^4y-3y^8)dx+(2x^5-9xy^7)dy=0$

46) $y(x^2+y^2)dx+x(xdy-ydx)=0$

47) $y(x^2y^2+xy)dx+x(x^2y^2-1)dy=0$

48) $(x^4\ln(x)-2xy^3)dx+3x^2y^2dy=0$

49) $\dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}-y}{y\sqrt{x^2+y^2}-x}\right)$

50) $\left[x\left(x^2+y^2\right)^2-y\right]dx+\left[y\left(x^2+y^2\right)^2+x\right]dy=0$