

4

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden Ecuaciones Exactas

Definición:

Una ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy=0$ es exacta si la expresión de la izquierda es la diferencial total de alguna función $f(x,y)$.

La ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es una ecuación diferencial exacta si y solo si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Definición:

Una ecuación diferencial $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz=0$ es exacta si la expresión $(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ es el gradiente de alguna función $f(x,y,z)$.

La ecuación $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0$ es exacta si y sólo si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ y

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Ejercicios

Determine el valor de k , para que las ecuaciones diferenciales 71 a 73 sean exactas:

- 1) $(6xy^3 + \text{Cos}(y)) dx + (kx^2y^2 - x\text{Sen}(y)) dy = 0$
- 2) $(4x^3y - 15x^2 - y) dx + (x^4 + ky^2 - x) dy = 0$
- 3) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y) dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - kx) dy = 0$

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

- 4) $(3x^2y + e^y) dx + (x^3 + xe^y - 2y) dy = 0$
- 5) $(e^y + 2xy\text{Ch}(x)) \frac{dy}{dx} + xy^2\text{Sh}(x) + y^2\text{Ch}(x) = 0$
- 6) $(2y\text{Sen}(x)\text{Cos}(x) - y + 2y^2e^{xy^2}) dx = (x - \text{Sen}^2(x) - 4xye^{xy^2}) dy = 0$
- 7) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(ye^y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy = 0$
- 8) $(y^2\text{Cos}(x) - 3x^2y - 2x) dx + (2y\text{Sen}(x) - x^3 + \ln(y)) dy = 0$
- 9) $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y\text{Cos}(x)}{\text{Sen}(x) + y}$
- 10) $(ye^{-x} - \text{Sen}(x)) dx - (e^{-x} + 2y) dy = 0$

- 11) $\left(x^2 + \frac{y}{x}\right)dx + (\log(x) + 2y)dy = 0$
- 12) $\left(x\sqrt{x^2 + y^2} - y\right)dx + \left(y\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)dy = 0$
- 13) $\left(4x^3y^3 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(3x^4y^2 - \frac{1}{y}\right)dy = 0$
- 14) $\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right)dy = 0$
- 15) $\left(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2}\right)dx + \left(x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y\right)dy = 0$
- 16) $\left(e^x \text{Sen}(z) + 2yz\right)dx + (2xz + 2y)dy + \left(e^x \text{Cos}(z) + 2xy + 3z^2\right)dz = 0$
- 17) $e^y \text{Sen}(z)dx + xe^y \text{Sen}(z)dy + xe^y \text{Cos}(z)dz = 0$
- 18) $e^x \left(e^z - \ln(y)\right)dx + \left(e^y \ln(z) - e^x y^{-1}\right)dy + \left(e^{x+z} + e^y z^{-1}\right)dz = 0$
- 19) $(4xy + 3yz - 2)dx + (2x^2 + 3xz - 5z^2)dy + (3xy - 10yz + 1)dz = 0$
- 20) $z \text{Tan}(y)dx + xz \text{Sec}^2(y)dy + x \text{Tan}(y)dz = 0$
- 21) $yzdx + xzdy + xydz = 0$
- 22) $(2xy)dx + (x^2 - z^2)dy - (2yz)dz = 0$
- 23) $(2x)dx - (y^2)dy - \left(\frac{4}{1+z^2}\right)dz = 0$
- 24) $(\text{Sen}(y)\text{Cos}(x))dx + (\text{Cos}(y)\text{Sen}(x))dy + dz = 0$
- 25) $2\text{Cos}(y)dx + \left(\frac{1}{y} - 2x\text{Sen}(y)\right)dy + \frac{1}{z}dz = 0$
- 26) $3x^2dx + \frac{z^2}{y}dy + 2z \ln(y)dz = 0$
- 27) $(2x \ln(y) - yz)dx + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)dy - xydz = 0$
- 28) $\frac{1}{y}dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{y}{z^2}dz = 0$
- 29) $\frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$
- 30) $(2y \text{Cos}(2xy) + yz)dx + (2x \text{Cos}(2xy) - 4z \text{Sen}(4yz) + xz)dy + (xy - 4y \text{Sen}(4yz))dz = 0$