1 Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden Conceptos Preliminares

Introducción:
El origen de las ecuaciones diferenciales se remonta hacia finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII, cuando Newton, Leibniz, Huygens, Bernoulli, Euler y Clairaut, entre otros, plantearon modelos que les permitieron resolver preguntas relacionadas con Astronomía, Cálculo, Física y problemas geométricos. Se lograron ecuaciones diferenciales que permitían conocer la distancia vertical recorrida por un cuerpo que cae libremente, el desplazamiento vertical de una masa sujeta a un resorte, la rapidez con que un cuerpo se enfría cuando pasa de un lugar con una temperatura dada a otro lugar con otra temperatura, funciones cuyas tangentes y normales satisfacen condiciones muy particulares, etc.

Definición:
Una ecuación diferencial es una igualdad que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes. Hay entonces ecuaciones que contienen derivadas ordinarias y otras que contienen derivadas parciales.

Definición:
El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta contenida en la ecuación. Existen ecuaciones de primer, segundo, tercer, …, y n-ésimo orden.

Definición:
El grado de una ecuación diferencial dada en forma polinomial es la potencia a la que está elevada la derivada más alta. Una ecuación lineal de orden n es de la forma $a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_n(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_n(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_1(x)\frac{d^1 y}{dx^1} + a_0(x)y = g(x)$. Una ecuación que no se pueda expresar de esta forma es no lineal.

Definición:
La función $\phi(x)$ se llama solución explícita de la ecuación diferencial $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ en un intervalo I, si al sustituirse por y en la ecuación, la satisface para todo valor x del intervalo I.

Definición:
La relación G(x,y)=0 es una solución implícita de la ecuación diferencial $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ en el intervalo I, si define una o más soluciones explícitas en I.

Definición:
Un problema de valor inicial de una ecuación diferencial de n-ésimo orden $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ consiste en encontrar una solución particular de la ecuación diferencial en un intervalo I que satisfaga en x_0 las n condiciones iniciales $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$, $y''(x_0)=y_2$, … , $y(n-1)(x_0)=y_{n-1}$. donde $x_0 \in I$, y_0, y_0, y_1, …, y_{n-1} son constantes dadas.

Ejercicios

Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $\mathrm{Sen}(x)\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4x\dfrac{dy}{dx} = 0$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{25 - x^2 - y^2}$

3) $\left(y + y^3\right)\dfrac{dy}{dx} = x^2$

4) $\dfrac{dy}{dx} = x^3\mathrm{Cos}(y)$

5) $(1 - x)\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x\dfrac{dy}{dx} + 5y = \mathrm{Cos}(x)$

6) $x\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right) - 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

7) $x^2dy + (y - xy - xe^x)dx = 0$

8) $\mathrm{Sen}(x)\dfrac{d^3y}{dx^3} - \mathrm{Cos}(x)\dfrac{dy}{dx} = 2$

9) $\dfrac{\partial T}{\partial t} - \alpha\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = 0$

10) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u(x, y)$

11) Considere la ecuación diferencial $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{4 - y^2}{4 - x^2}$.

a) Explique porqué no tiene soluciones reales cuando $|x|<2$, $|y|>2$?
b) ¿Hay otras regiones del plano XY donde la ecuación no tiene solución?
c) ¿En qué región del plano tiene solución?

Determine si la función o ecuación dada es solución de la ecuación diferencial:

12) $\dfrac{dy}{dx} = (2 - y)(1 - y)$; $x = \ln\left(\dfrac{2 - y}{1 - y}\right)$

13) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1$; $y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt + Ae^{-x^2}$

14) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \mathrm{Tan}(x)$; $y = -\mathrm{Cos}(x)\ln\left(\mathrm{Sec}(x) + \mathrm{Tan}(x)\right)$

15) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - xy + 2y = 0$; $y = x\mathrm{Cos}\left(\ln(x)\right)$

16) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y$; $y = \dfrac{1 + Ae^{2x}}{1 - Ae^{2x}}$

17) $\left(x - y\mathrm{Cos}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)dx + x\mathrm{Cos}\left(\dfrac{y}{x}\right)dy = 0$; $\mathrm{Sen}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \ln|x| = C$

18) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x\mathrm{Cos}(x)$; $y = \dfrac{1}{4}x\mathrm{Cos}(x) + \dfrac{1}{4}x^2\mathrm{Sen}(x)$

19) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = \dfrac{1}{x}$; $y = \dfrac{1}{2}e^x\int_a^x \dfrac{e^{-t}}{t}dt - \dfrac{1}{2}e^{-x}\int_a^x \dfrac{e^t}{t}dt$

20) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{dy}{dx} = \mathrm{Sec}^2(x)$; $y = -\mathrm{Cos}(x)\ln\left(\mathrm{Sec}(x) + \mathrm{Tan}(x)\right)$

21) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = x^2\sqrt{x}$; $y = A\dfrac{\mathrm{Cos}(x)}{\sqrt{x}} + B\dfrac{\mathrm{Sen}(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$

22) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+2y=e^{-x}Sen(x)-2e^{-x}Cos(x)$; $y=\left(\dfrac{1}{2}xCos(x)+xSen(x)\right)e^{-x}$

23) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+5y=e^{x}Cos(2x)+Sen(x)$; $y=\dfrac{1}{10}Cos(x)+\dfrac{1}{5}Sen(x)+\dfrac{1}{4}e^{x}Sen(2x)$

24) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3+2x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=2y+1$; $x=-\dfrac{3}{2}t^2,\ y=-t^3-\dfrac{1}{2}$

25) $y=x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$; $x=-2t+\dfrac{1}{t},\ y=-t^2-\ln(t)+1$

Plantear una ecuación diferencial para cada una las situaciones y familias de curvas dadas a continuación:

26) La familia de parábolas $f(x) = (x+a)^2$.

27) La familia de funciones de la forma $f(x) = Ax^3$.

28) La familia de parábolas con vértice en el origen, cuyos focos están en el eje X.

29) La familia de curvas $f(x)=\dfrac{2Ae^{2x}}{1+Ae^{2x}}$.

30) La familia biparamétrica $f(x) = Ax^2 + Bx^3$.

31) La familia biparamétrica $f(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$.

32) La familia biparamétrica $f(x) = Ae^{x} + Bxe^{x}$.

33) La familia biparamétrica $f(x) = ASen(\ln x) + BCos(\ln x)$.

34) La familia biparamétrica $f(x) = e^{4x}(ASen(2x) + BCos(2x))$.

35) La familia biparamétrica $f(x) = Axe^{x}Sen(x) + Bxe^{x}Cos(x)$.

36) La familia de circunferencias con centro en el origen de coordenadas y radio r.

37) La familia de circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y tienen el centro en el eje X.

38) La familia de circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y tienen el centro en el eje Y.

39) La familia de circunferencias que pasan por (0,-5) y (0,5), y cuyos centros están en el eje X.

40) La familia de circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y tienen el centro en el eje Y.

41) La familia triparamétrica $f(x) = Ae^{x} + Be^{2x} + Ce^{3x}$.

42) La familia triparamétrica $f(x) = A + BCos(x) + CSen(x)$.

43) La familia de hipérbolas $\frac{(x-h)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$.

44) La familia de elipses $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-h)^2}{25}=1$.

45) La familia de tangentes a la parábola $y^2 = 2x$.

46) La curva para la cual, en cada uno de sus puntos (x,y) la pendiente es igual a doble de la suma de las coordenadas del punto.

47) La curva para la cual, en cada punto (x,y) la pendiente de la tangente es igual al cuadrado de la abscisa del punto.

48) La curva para la cual, en el punto (x,y) la longitud de la subtangente es igual a la suma de las coordenadas del punto.

49) La curva para la cual, el eje de las Y divide en dos partes iguales al segmento que une P(x,y) con el punto de intersección de la normal en P(x,y).

50) Todas las líneas rectas cuya distancia al origen de coordenadas es 1.

51) La familia de curvas que son ortogonales a la familia $y^3 + 3x^2y = c$.

52) La familia de curvas que son ortogonales a la familia $2x^2 + y^2 = 4cx$.

53) La familia de curvas que son ortogonales a la familia $y=\frac{x}{1+cx}$.

54) La familia de curvas que son ortogonales a la familia $y=\frac{1}{c+x}$.

55) La familia de curvas que son ortogonales a la familia $y=\frac{c}{1+x^2}$.

56) La familia de curvas que son ortogonales a la familia $y=\frac{1+cx}{1-cx}$.

57) La familia de curvas que son ortogonales a la familia $y=\frac{1}{\ln(cx)}$.

58) La familia de curvas que son ortogonales a la familia $e^x\text{Cos}(y) = c$.

59) La familia de curvas que son ortogonales a la familia $\text{Sen}(y) = ce^{-x}$.

60) La familia de curvas que son ortogonales a la familia $y = \ln(c + \tan(x))$.