CÁLCULO VECTORIAL
GUIA No 7

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DE LÍNEA

1. Teorema de Gauss

Si F = Mi + Nj + Pk es un campo definido sobre la región D, y esta región se encuentra encerrada por la superficie S, y N = $\frac{\nabla S}{\|\nabla S\|}$ es un vector normal a la superficie, entonces, el fluido total que fluye a través de la superficie S está dado por Flujo = $\iint_S (F \bullet N) dS = \iiint_S (divF) dV$.

Aplicación: Calcular flujo hacia el exterior de un campo F, a través de la superficie S de una región R.

Procedimiento:
a) Dibuje la región R
b) Calcule divF
c) Calcule la integral triple $\iiint_R (divF) dV$.
d) Tome los límites de integración de la región R.

Ejercicio 1:
Calcule el flujo hacia el exterior, del campo F(x,y,z) = (y – x)i + (z – y)j + (y – x)k, a través de la frontera de la región limitada por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

Ejercicio 2:
Calcule el flujo hacia el exterior, del campo F(x,y,z) = (y)i + (xy)j - (z)k, a través de la frontera de la región limitada por el cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$, entre el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Ejercicio 3:
Calcule el flujo hacia el exterior, del campo F(x,y,z) = (x^2)i - (2xy)j + (3xz)k, a través de la frontera de la región imitada en el primer octante por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Ejercicio 4:

Calcule el flujo hacia el exterior, del campo F(x,y,z) = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(xi + yj + zk)$, a través de la frontera de la región $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 2$.

Ejercicio 5:

Calcule el flujo hacia el exterior, del campo F(x,y,z) = $\frac{(xi + yj + zk)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, a través de la frontera de la región limitada por superiormente por el cono z = $\sqrt{x^2 + y^2}$, lateralmente por el cilindro x2 + $y^2 = a^2$, inferiormente por el plano z = 0.

2. Teorema de Stockes

F = Mi + Nj + Pk es un campo definido en una región D, y la región está encerrada por la superficie S, y N es normal a S, y S está acotada por una curva C, y r(t) = r(t)i + y(t)j+ z(t)k es el contorno de la superficie S o parametrización de C, entonces la circulación del campo F alrededor de la superficie S está dada por la integral Circulación = $\int_C F \bullet dr = \iint_R (rotF \bullet N)dA$, donde R es la región del plano limitada por la proyección de r(t).

Aplicación: Calcular la circulación de un fluido en una superficie S a lo largo de un camino cerrado r(t).

Procedimiento:

a) Dibujar la región D.
b) Dibujar la curva C y su proyección en el plano XY.
c) Calcular rotF
d) Hallar el vector normal N = ∇S.
e) Realizar (rotF • N)
f) Calcular la integral $\iint_R (rotF \bullet N)dA$, donde R es la región del plano XY limitada por la curva r(t). En algunos casos es conveniente usar $\int_C F \bullet dr = \int_C (Mdx + Ndy + Pdz)$.

Ejercicio 1:

Calcule $\iint_R (rotF \bullet N)dA$, donde F(x,y,z) = (y^2)i + (x)j + (z^2)k, S es la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está debajo del plano z = 1.

Ejercicio 2:

Calcule $\iint_R (rotF \bullet N)dA$, donde F(x,y,z) = (yz)i + (3xz)j + (z^2)k, S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está debajo del plano z = 2.

Ejercicio 3:

Calcule $\iint_R (rotF \bullet N)dA$, donde F(x,y,z) = (y^2)i + (x^2)j + (z^2)k, S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está por encima del plano z = 0.

Ejercicio 4:

Calcule $\iint_R (rotF \bullet N)dA$, donde F(x,y,z) = ($0.5y^2$)i + (z)j + (x)k, S es la parte del plano x + z = 1 que se interseca con el elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$.

Ejercicio 5:

Calcule $\iint_R (rotF \bullet N)dA$, donde F(x,y,z) = F(x,y,z) = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(xi + yj + zk)$, S es la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, que esta debajo del paraboloide $z = a^2 - x^2 - y^2$.