CÁLCULO VECTORIAL
GUIA No 6

INTEGRALES MÚLTIPLES

1. Integrales Dobles

Introducción: Si f es una función definida sobre una región R, la integral doble se puede interpretar como el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z = f(x,y)$, inferiormente por el plano XY y lateralmente por la el borde de la región R, el cual se obtiene sumando los paralelepípedos de áreas $\Delta_k A$ y alturas $f(x_k, y_k)$. Si la región R se subdivide en n subregiones de pequeñas áreas $\Delta_k A$, entonces se tiene que $\underset{n\to\infty}{Lím}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta_k A = L = \iint_R f(x,y)dA$.

Definición: Una función $f(x,y)$ es integrable en una región R, si existe un número L, tal que $\underset{n\to\infty}{Lím}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta_k A = L$. La condición para que f sea integrable en la región R es que sea continua en dicha región.

Propiedades: Si $c\in R$, f y g son integrables en una región R, y $R=R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2=0$, entonces:

a) $\iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA$

b) $\iint_R \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)dA = \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA$

c) Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ en R, entonces $\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA$.

d) Si $f(x,y)$ es acotada en R, (es decir, $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y)\in R$) y A es el área de la región R, entonces $mA \leq \iint_R f(x,y)dA \leq MA$.

e) $\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$.

Teorema de Fubini: Este teorema consta de tres partes: la primera nos permite evaluar integrales dobles sobre regiones rectangulares y cambiar el orden de integración; la segunda y la tercera nos permiten evaluar integrales dobles sobre cualquier región.

a) Si f es una función continua en la región R = [a,b]x[c,d], entonces se tiene que $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$. Estas integrales se llaman integrales iteradas.

b) Si f es una función continua en R, R es la región definida por a ≤ x ≤ b, $g_1(x)$ ≤ y ≤ $g_2(x)$, $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son continuas en el intervalo [a,b], entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} f(x,y)dydx .$$

c) Si f es una función continua en R, R es la región definida por c ≤ y ≤ d, $h_1(y)$ ≤ x ≤ $h_2(y)$, $h_1(y)$ y $h_2(y)$ son continuas en el intervalo [c,d], entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1}^{h_2} f(x,y)dxdy .$$

Áreas: el área de la región limitada por las curvas y = $g_1(x)$, y = $g_2(x)$, con $g_2(x) \geq g_1(x)$ en [a,b] está dada por $A = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} dydx$.

Volumen: El volumen del sólido limitado por el plano XY, la superficie $z = f(x,y) \geq 0$ y la región R (limitada por las curvas y = $g_1(x)$, y = $g_2(x)$ con $g_2(x) > g_1(x)$ en [a,b]) está dado por $V = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} f(x,y)dydx$.

Ejercicios Propuestos

1) Considere la integral I = $\int_R \int e^{xy} dA$, donde R es la región rectangular con vértices A(0,0), B(1,0), C(0,1) y D(1,1).

a) Determine un intervalo cerrado que contenga el valor de la integral I en la región R.

b) Encuentre números p y q tales que l I – p l > q.

2) Considere la integral I = $\int_R \int (x^2 + y^2) dA$, donde R es la región rectangular con vértices A(0,0), B(1,0), C(0,1) y D(1,1).

a) Encuentre un intervalo cerrado que contenga el valor de la integral I en la región R.

b) Encuentre números p y q tales que l I – p l > q.

3) Considere la integral I = $\int_R\int (Senx + Seny)dA$, donde R es la región rectangular con vértices A(0,0), B(π,0), C(0,π) y D(π,π).

a) Encuentre un intervalo cerrado que contenga el valor de la integral I en la región R.

b) Encuentre números p y q tales que | I – p | > q.

4) Dibuje la región de integración y evalúe la integral:

a) $\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}(Senx + Cosy)dxdy$

b) $\int_{1}^{\ln 8}\int_{0}^{\ln y} e^{x+y}dxdy$

c) $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{Senx} ydydx$

d) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{dxdy}{x^2+y^2}$

e) $\int_{1}^{4}\int_{0}^{\sqrt{x}}\frac{3}{2}e^{\frac{y}{\sqrt{x}}}dydx$

f) $\int_{0}^{4}\int_{0}^{y}\sqrt{9+y^2}dxdy$

g) $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3ydxdy$

h) $\int_{1}^{\infty}\int_{e^{-x}}^{1}\frac{dydx}{x^3y}$

i) $\int_{0}^{3}\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{1+y^2}dydx$

j) $\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{dxdy}{xy}$

5) Integre $f(x,y) = \sqrt{4-x^2}$ sobre el sector más pequeño cortado del disco $x^2 + y^2 \leq 4$ por los rayos θ = π/6 y θ = π/2.

6) Calcular la integral iterada, cambie el orden de integración si es necesario:

a) $\int_{0}^{3}\int_{0}^{x} x^2e^{xy}dydx$

b) $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2} Sen(\pi y^3)dydx$

c) $\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} e^{x^2}dxdy$

d) $\int_{0}^{1}\int_{3y}^{3} e^{x^2}dxdy$

e) $\int_{0}^{1}\int_{y}^{1}\frac{Senx}{x}dxdy$

f) $\int_{0}^{1}\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

g) $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6xdydx$

h) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}dydx$

i) $\int_{0}^{3}\int_{\sqrt{x/3}}^{1} e^{y^3}dydx$

j) $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1+Cosx} y^2Senxdydx$

k) $\int_{0}^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{dydx}{y^4+1}$

l) $\int_0^1 \int_y^1 Sen(x^2)dxdy$

m) $\int_0^2 \int_{y^2}^{4} \sqrt{x}Sen(x)dxdy$

n) $\int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\,dydx$

o) $\int_0^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} \frac{dydx}{\ln(y)}$

p) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{(x^2+1)(y^2+1)}$

q) $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{-(x+2y)}dxdy$

r) $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} xye^{-(x^2+y^2)}dxdy$

7) Justifique la igualdad $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = 4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$.

8) Determine el valor de la integral doble en la región indicada:

a) $\iint_R Cos(x+y)dA$, R es la región limitada por $y = x$, $x = \pi$, eje X.

b) $\iint_R x^2\sqrt{9-y^2}\,dA$, R es la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

c) $\iint_R \frac{y^2}{x^2}dA$, R es la región limitada por $y = x$, $y = 2$, $xy = 1$.

d) $\iint_R \frac{dA}{\sqrt{2y-y^2}}$, R es la región del primer cuadrante del plano XY limitada por $x^2 = 4 - 2y$.

e) $\iint_R \frac{dA}{xy}$, R es el rectángulo [1,2]x[1,2].

f) $\iint_R (x^2+y^2)dA$, R es el triángulo de vértices A(0,0), B(1,0) y C(0,1).

g) $\iint_R yCos(xy)dA$, R es el rectángulo [0,π]x[0,1].

h) $\iint_R (x-\sqrt{y})dA$, R es la región del primer cuadrante del plano XY limitada por la recta x + y = 1.

i) $\iint_R (e^x \ln y)dA$, R es la región del primer cuadrante del plano XY , que está arriba de x = ln(y), entre las rectas $y = 1$, $y = 2$.

j) $\iint_R \frac{\ln\sqrt{y}}{xy}dA$, R es la región limitada por el rectángulo [0,1]x[0,2].

k) $\iint_R 12x^2e^{y^2}dA$, R es la región limitada en el primer cuadrante por las líneas $y = x^3$, $y = x$.

9) Calcule el área de la región limitada por las líneas $y = x^2 - 9$, $y = 9 - x^2$.

10) Calcule el área de la región limitada por las líneas $y^2 = 4x$, $4y = x^2$.

11) El volumen de cierto sólido cilíndrico recto (no circular) que tiene su base sobre el plano XY está dado por $V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)ddy$.

a) Bosqueja la región de integración.
b) Exprese V como una sola integral.

12) Calcule el volumen del sólido limitado por la superficie $f(x,y) = 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$ y los planos XY, XZ, YZ, $x = 3$, $y = 2$.

13) Calcule el volumen del sólido limitado por $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, $x^2 + 4y^2 = 4$, y está por encima del plano XY.

14) Calcule el volumen del sólido que está limitado superiormente por el plano $z - 4x = 0$, inferiormente por el plano XY, y lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

15) Calcule el volumen del poliedro limitado por los planos $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, XY, XZ y YZ. $a>0$, $b>0$, $c>0$.

16) Calcule el volumen del sólido limitado en el primer octante del sistema XYZ por los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$.

17) Determine el volumen del sólido limitado en el primer octante del sistema XYZ por $x + z^2 = 1$, $x = y$, $x = y^2$.

18) Calcule el volumen del sólido limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

19) Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por $z = a^2 - x^2 - y^2$, inferiormente por $z = a - y$.

20) Hallar el volumen en el primer octante del sólido limitado por los *planos* $x + y + 2 = z$, $z = 0$, al interior del cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

21) Hallar el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $y + z = 4$, $z = 0$.

22) Hallar el volumen del sólido limitado por $z = 0$, $z = x^2 + 4y^2$, y los cilindros $x - y^2 = 0$, $y - x^2 = 0$.

23) Hallar el volumen de la porción de cilindro $4x^2 + y^2 = a^2$ comprendida entre los planos $z = 0$, $z = my$.

24) Encuentre el volumen del sólido limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$, el cilindro $8y = x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$.

25) ¿Qué cantidad de volumen se remueve cuando se aplica un taladro de radio a sobre una esfera de radio $2a$, si el eje del orificio es un diámetro de la esfera?

26) Encuentre el volumen del sólido limitado superiormente por $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ y limitado inferiormente por el plano $z = 0$.

27) Encuentre el volumen del sólido limitado por $y^2 + z^2 = 4$ y $y^2 + z^2 + 2x = 16$, delante de $x = 0$.

28) Un sólido está limitado superiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, inferiormente por el plano z = 0, lateralmente por los planos $y - x = 0$, $y + x = 2$, $x = 0$. ¿Cuál es su volumen?

29) Encuentre el volumen del sólido cortado de la columna cuadrada $|x| + |y| \leq 1$ por los planos $z = 0$, $z = 3 - 3x$.

30) Encuentre el volumen de un sólido cuya base se encuentra en el plano XY limitada por las líneas $y = 4 - x^2$ y $3x - y = 0$; y la parte superior es el plano $z = 4 + x$.

31) Encuentre el volumen de la cuña cortada del primer octante por el cilindro $z = 12 - 3y^2$ y el plano $x + y = 2$.

32) Encuentre el volumen de un sólido limitado al frente y atrás por los planos $x - 2 = 0$, $x - 1 = 0$; a los lados por los cilindros $y = 1/x$, $y = -1/x$; arriba y abajo por los planos $z = 0$, $z = 1 + x$.

33) Encuentre el volumen del sólido limitado por la superficie $z = \dfrac{1}{(x+1)^2(y+1)^2}$ y el plano $z = 0$, para $x \geq 0$, $y \geq 0$.

34) Encuentre el volumen del sólido limitado por la superficie $z = e^{-(x+y)/2}$ y el plano $z = 0$, para $x \geq 0$, $y \geq 0$.

35) El valor medio de $f(x,y)$ sobre la región R está dado por $\overline{f} = \dfrac{1}{A}\iint_R f(x,y)\,dA$, donde A es el área de la región R. Encuentre el valor medio de la siguientes funciones en la región dada:

a) $f(x,y) = xy$; R es el polígono con vértices (0,0), (4,0), (4,2) y (0,2).

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$; R es el polígono con vértices (0,0), (2,0), (2,2) y (0,2).

c) $f(x,y) = e^{x+y}$; R es el triángulo con vértices (0,0), (0,1) y (1,1).

d) $f(x,y) = xCos(xy)$; R es el rectángulo $[0,\pi]x[0,1]$.

e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; R es el triángulo con vértives (-2,0), (0,-3) y (3,1).

f) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; R es la región limitada por la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

36) Calcular el área de la porción del plano $z = 2a - x - y$, que está encima del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ en el primer cuadrante.

37) Calcular el área de la porción de superficie $f(x,y) = 1 - x^2 + y$, que está encima de la región triangular de vértices (1,0,0), (0,-1,0) y (0,1,0).

38) Calcular el área de la superficie dada por $z = 2x + 2y$ sobre la región definida por el triángulo de vértices (0,0,0), (2,0,0) y (0,2,0).

39) Encuentre el área de la superficie $z = 10 + 2x - 3y$ sobre la región cuyos vértices son (0,0,0), (2,0,0), (0,2,0) y (2,2,0).

40) Encuentre el área de la superficie $z = 8 + 2x + 2y$ sobre la región R definida como $\{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$.

41) Encuentre el área de la superficie $f(x,y) = 9 - x^2$ sobre la región cuyos vértices son (0,0,0), (3,0,0), (0,3,0) y (3,3,0).

42) Encuentre el área de la superficie $f(x,y) = 2 + x^{3/2}$ sobre la región cuyos vértices son (0,0,0), (0,4,0), (3,4,0) y (3,0,0).

43) Encuentre el área de la superficie $f(x,y) = 2x + y^2$ sobre la región cuyos vértices son (0,0,0), (2,0,0) y (0,2,0).

44) Encuentre el área de la superficie $f(x,y) = 2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ sobre la región definida como $\{(x,y) | 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}$.

45) Encuentre el área de la superficie $f(x,y) = \ln|Secx|$ sobre la región definida como $\{(x,y) | 0 \leq x \leq \pi/4,\ 0 \leq y \leq Tanx\}$.

46) Calcule el área de la porción del cono $x^2 + y^2 = 3z^2$ situada por encima del plano XY, interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.

47) Calcule el área de la superficie del sólido limitado por los cilindros $x^2 + z^2 = 16$ y $x^2 + y^2 = 16$.

48) Hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ exterior al paraboloide $x^2 + y^2 + z = 16$.

49) Hallar el área de la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 6y$ situada dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

50) Hallar el área de la porción del cono $z^2 = x^2 + y^2$ interior al prisma vertical cuya base es el triángulo limitado por las rectas $y = x$, $x = 0$, $y = 1$ en el plano XY.

51) Calcule las siguientes integrales cartesianas pasando a una integral polar equivalente:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}(x^2 + y^2)dxdy$

b) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dydx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}\frac{2dydx}{1+\sqrt{x^2 + y^2}}$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx$

f) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}}\frac{2dydx}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}$

g) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

i) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{dxdy}{\left(1+x^2 + y^2\right)^2}$

52) Calcule la integral $\displaystyle\iint_R Sen\theta dA$, donde R es la región del primer cuadrante que se encuentra dentro de la circunferencia $r = 4Cos\theta$, y por fuera de la circunferencia $r = 2$.

53) Calcule la integral $\displaystyle\iint_R e^{-x^2-y^2}dydx$, donde R es la región del primer cuadrante encerrada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

54) Calcule la integral $\displaystyle\iint_R \frac{dA}{a^2 + x^2 + y^2}$, donde R es la región encerrada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

55) Calcule la integral $\iint_R \ln\left(x^2+y^2+a\right)dA$, donde R es la región del primer cuadrante encerrada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

56) Calcule la integral $\iint_R \frac{dA}{a+\sqrt{x^2+y^2}}$, donde R es la región encerrada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

57) Calcule la integral $\iint_R \left(x^2+y^2\right)dxy$, donde R es la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$.

58) Calcule la integral $\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$, donde R es la región encerrada por la hoja de la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, para $x \geq 0$.

59) Integre la función $f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sobre la región $1 \leq x^2 + y^2 \leq e$.

60) Calcular el área de la región limitada por la curva cerrada $r = 3Cos(3\theta)$.

61) Encuentre el área de la región que se encuentra por fuera de la circunferencia $r = a$, y por dentro del cardioide $r = a + aCos\theta$.

62) Encuentre el área de la región encerrada por la curva $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

63) Use coordenadas polares para hallar el área de la región limitada por las líneas $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y - x = 0$, $y = 0$.

64) Encuentre el área de la región cortada del primer cuadrante por la curva $r = 2(2 - Sen\theta)^{1/2}$.

65) Encuentre el área de la región que se encuentra dentro del cardioide $r = a + aCos\theta$ y por fuera de la circunferencia $r = a$.

66) Encuentre el área de la región que se encuentra dentro del lazo grande y por fuera del lazo pequeño del caracol $r = 2 - 4Sen\theta$.

67) Encuentre el área de la región que se encuentra dentro del caracol $r = 3 - Cos\theta$ y por fuera de la circunferencia $r = 5Cos\theta$.

68) Encuentre el área de la región del primer cuadrante interior al cardioide $r = a + aSen\theta$.

69) Encuentre el área de la región común a los cardioides $r = a + aCos\theta$ y $r = a - aCos\theta$.

70) Encuentre la altura promedio del hemisferio z = $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$.

71) La base de un cilindro sólido recto se encuentra sobre el plano $z = 0$ limitada por el cardioide $r = a + aCos\theta$ y por fuera de la circunferencia $r = a$; el techo del cilindro es la proyección de la base sobre el plano $z - x = 0$. Encuentre el volumen del cilindro.

72) La base de un cilindro recto sólido es la región encerrada por la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ en el plano $z = 0$, en la parte superior el cilindro está limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Encuentre el volumen del cilindro.

73) Encuentre el volumen del sólido que se obtiene al cortar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ por el cilindro $x^2 + y^2 = 4x$.

74) Calcule el volumen del sólido cilíndrico limitado superiormente por la superficie $z = x^2 + y^2$, si la base está es la región común encerrada por los cilindros $x^2 + (y-1)^2 = 1$ y $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

75) Encuentre el volumen del sólido que se obtiene al cortar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ por el cilindro $x^2 + y^2 = 4x$.

76) Encuentre el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, el plano $z = 0$, y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

77) Calcule el volumen del sólido limitado por el plano XY, la superficie $z = ae^{-(x^2+y^2)}$ y el cilindro $x^2 + y^2 = r^2$.

78) Calcule el área de la superficie de la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + y^2 = a^2$.

79) Hallar el área de la parte del cono z = $\sqrt{x^2 + y^2}$ cortada por el cilindro $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

80) Calcular el área de la superficie halicoidal $z = Arctan(x/y)$, situada en el primer octante y que está comprendida entre los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$. ($b>a$).

2. Integrales Triples

Introducción: Si f es una función definida sobre una región D del espacio, la integral triple se define como $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta_k V = L = \iiint_D f(x,y,z)dV$. Si $f(x,y,z)=1$ entonces la integral triple representa el volumen de la región D.

Cambio de coordenadas: Si $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ entonces $\iiint_D f(x,y,z)dV = \iiint_D f(u,v,w)\left|J(u,v,w)\right| dudvdw$ donde $J(u,v,w) = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$. (Determinante Jacobiano

Coordenadas cilíndricas: Si $x = rCos\theta$, $y = rSen\theta$, $z = z$, $r^2 = x^2 + y^2$, entonces J(r,θ,z) = r. La integral triple se convierte en $\iiint_D f(x,y,z)dV = \iiint_D f(r,\theta,z) rdzdrd\theta$.

Coordenadas esféricas: Si x = ρ Senϕ Cosθ, y = ρ Senϕ Senθ, z = ρ Cosϕ, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, entonces J(ρ,ϕ,θ) = ρ^2 Senϕ y la integral triple se convierte en $\iiint_D f(x,y,z)dV$ = $\iiint_D f(\rho,\phi,\theta)\ \rho^2 Sen\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$.

Cálculo de masa: Si D es una región sólida, cuya densidad en cada punto (x,y,z) está dada por $d = f(x,y,z)$, entonces la **masa** del sólido D es $M = \iiint_D f(x,y,z)dV$.

Cálculo de momentos: Si D es una región sólida, cuya densidad en cada punto (x,y,z) está dada por $d = f(x,y,z)$, entonces los **momentos** con respecto a los planos coordenados ***x=0*** (plano yz), ***y=0*** (plano xz), ***z=0*** (plano xy) están dados por:

a) $Myz = \iiint_D xf(x,y,z)dV$, momento con respecto al plano x = 0.

b) $Mxz = \iiint_D yf(x,y,z)dV$, momento con respecto al plano y = 0.

c) $Mxy = \iiint_D zf(x,y,z)dV$, momento con respecto al plano z = 0.

Cálculo del centro de masa: Si D es una región sólida, cuya densidad en cada punto (x,y,z) está dada por $d = f(x,y,z)$, entonces el **centro de masa** del sólido D es el punto $\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\right) = \left(\dfrac{Myz}{M}, \dfrac{Mxz}{M}, \dfrac{Mxy}{M}\right)$. Si d = f(x,y,z) es constante entonces el centro de masa recibe el nombre de **centroide**.

Cálculo de momentos de inercia: Si D es una región sólida, cuya densidad en cada punto (x,y,z) está dada por $d = f(x,y,z)$, entonces los **momentos estáticos** con respecto a los ejes están dados por:

a) $Ix = \iiint\limits_D \left(y^2 + z^2 \right) f(x,y,z)\,dV$, momento de inercia con respecto al eje X.

b) $Iy = \iiint\limits_D \left(x^2 + z^2 \right) f(x,y,z)\,dV$, momento de inercia con respecto al eje Y.

c) $Iz = \iiint\limits_D \left(x^2 + y^2 \right) f(x,y,z)\,dV$, momento de inercia con respecto al eje Z.

d) $I_L = \iiint\limits_D \left(D(x,y,z) \right)^2 f(x,y,z)\,dV$, momento de inercia con respecto a la recta L, donde $D(x,y,z)$ es la distancia de cada punto del sólido a la recta L.

Ejercicios Propuestos

1) Calcule las siguientes integrales triples:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{e}^{2e}\int_{0}^{\pi/3} y\ln(z)Tan(x)\,dxdzdy$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{y}\int_{0}^{\sqrt{3z}} \frac{z\,dxdzdy}{x^2+z^2}$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\pi/2}}\int_{x}^{\sqrt{\pi/2}}\int_{1}^{3} Sen(y^2)\,dzdydx$

d) $\displaystyle\int_{1}^{4}\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} 2ze^{-x^2}\,dydxdz$

e) $\displaystyle\int_{1}^{4}\int_{-1}^{2z}\int_{0}^{\sqrt{3}x} \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dydxdz$

f) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi} Cos(x+y+z)\,dxdydz$

g) $\displaystyle\int_{1}^{e}\int_{1}^{e}\int_{1}^{e} \frac{dxdydz}{xyz}$

h) $\displaystyle\int_{1}^{e}\int_{1}^{e}\int_{1}^{e} \ln(x)\ln(y)\ln(z)\,dzdydx$

i) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{dzdydx}{\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^2}$

j) $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{0}^{1}\int_{2y}^{2} \frac{4Cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dxdydz$

k) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{1} 12xze^{zy^2}\,dydxdz$

l) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\sqrt[3]{z}}^{1}\int_{0}^{\ln(3)} \frac{\pi\, e^{2x} Sen(\pi y^2)}{y^2}\,dxdydz$

m) $\displaystyle\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dzdydx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$

n) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{dzdydx}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$

2) ¿Qué valor debe tomar a para que $\int_0^1 \int_0^{4-a-x^2} \int_a^{4-x^2-y} dzdydx = \frac{4}{15}$?

3) Calcule las siguientes integrales triples en la región dada:

a) $\iiint_D xySen(yz)dV$; donde D es el paralelepípedo limitado por los planos coordenados y los planos $x = \pi$, $y = \pi/2$, $z = \pi/3$.

b) $\iiint_D xyzdV$; donde D es la región limitada por los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$.

c) $\iiint_D (x+y+z)^2 dxdydz$; donde D es la parte común del paraboloide $2az \geq x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$.

d) $\iiint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz$; donde D es el interior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

e) $\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$; donde D es la región limitada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

4) Calcule el volumen del sólido limitado por el paraboloide $x^2 + 3y^2 = z$ y por el cilindro $y^2 + z = 4$.

5) Calcule el volumen del sólido limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

6) Encuentre el volumen del sólido limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $z = 8 - x^2 - y^2$.

7) Calcule el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos (0,0,0), (1,0,1), (0,0,1) y (0,1,1).

8) Encuentre el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos (-1,-1,-1), (0,3,0), (4,0,2) y (1,1,4).

9) Exprese las 6 integrales iteradas para calcular el volumen del tetraedro limitado en el primer octante por el plano $6x + 3y + 2z = 6$. Calcule el volumen.

10) Exprese las 6 integrales iteradas para calcular el volumen del sólido limitado en el primer octante por el cilindro $x^2 + z^2 = 4$ y el plano $y = 3$.

11) Calcule el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2y$.

12) Calcule el volumen del sólido limitado arriba y abajo por el clindro $z = y^2$ y el plano xy; lateralmente por los planos $x = 0, x = 1, y = -1, y = 1$.

13) Encuentre el volumen de la región limitada por los planos coordenados y los planos $x + z = 1$, $y + 2z = 2$.

14) Encuentre el volumen del tetraedro limitado en el primer octante por el plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. $a>0$, $b>0$, $c>0$.

15) Encuentre el volumen de la región común a los interiores de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$.

16) Calcule el volumen del sólido del primer octante limitado por el plano $x + y = 4$ y el cilindro $y^2 + 4z^2 = 16$.

17) Calcule el volumen de la sección cortada del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ por el plano $z = 0$ y el plano $x + z = 3$.

18) Encuentre el volumen de la región del primer octante que se encuentra entre los planos $x + y + 2z = 2$, $2x + 2y + z = 4$.

19) Calcule el momento respecto al plano z = 0 de la región cortada del cilindro elíptico $x^2 + 4y^2 = 4$ por el plano xy y el plano $z = 2 + x$.

20) Calcule la masa del sólido limitado superiormente por $z = x^2 + y^2$, inferiormente por $z = 0$, lateralmente por $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, teniendo en cuenta que la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de su distancia al origen.

Use coordenadas cilíndricas para resolver los problemas del 21 al 44:

21) Convierta la integral $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{x}(x^2+y^2)dzdxdy$ en una integral equivalente en coordenadas cilíndricas.

22) Calcule el volumen el primer octante del sólido limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 2y$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

23) Un sólido se encuentra limitado por $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, lateralmente por $x^2 + y^2 = a^2$ ($a>0$). Encuentre el centro de gravedad de este sólido, si es de densidad igual a 1.

24) Un sólido homogéneo en forma de cilindro circular recto tiene radio a, altura h. Obtenga el momento de inercia del cilindro con respecto a su eje.

25) Calcule la masa de una semiesfera sólida de radio a, si la densidad del volumen en cualquier punto (x,y,z) es proporcional a la distancia del punto al eje del sólido.

26) Determine el volumen del sólido encerrado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

27) Calcule el volumen del sólido en el primer octante limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z = x$.

28) Calcule el volumen del sólido acotado por el paraboloide $x^2 + y^2 + z = 12$ y el plano $z = 8$.

29) Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, inferiormente por el plano z = 0, lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

30) Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por el plano $z = 4 - y$, inferiormente por el plano $z = 0$, lateralmente por el paraboloide $x^2 + y^2 = 2y$.

31) La base de un cilindro recto sólido está en el plano z = 0, esta base está por fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y por dentro del cardioide $x^2 + y^2 = x + \sqrt{x^2 + y^2}$. La parte superior se encuentra en el plano $z = 4$.

32) Calcule el centro de masa de un sólido recto homogeneo cuya base es la región del plano xy que se encuentra entre las circunferencias $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, y la parte superior se encuentra en el plano $z = 3 - y$.

33) Halle el volumen del prisma cuya base es el triángulo del plano xy limitado por las líneas $y = 0$, $y = x$, $x = 1$. La parte superior está en el plano $z = 2 - y$.

34) Hallar la masa del sólido limitado por el semielipsoide superior $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, si la densidad en un punto es proporcional a la distancia entre el punto y el plano xy.

35) Calcule el momento de inercia respecto al eje de simetría (eje Z) del sólido limitado por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$; si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia entre el punto y el eje Z.

36) Calcule el volumen y el centro de masa del sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 4$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, si la densidad en cualquier punto es igual a 1.

37) Encuentre el volumen de la sección de la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra al interior del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.

38) Encuentre el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 4 - 4x^2 - 4y^2$ e inferiormente por $z = x^2 + y^2 - 1$.

39) Un cilindro circular recto con pared $1 \le x^2 + y^2 \le 2$ es cortado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$. ¿Cuál es el volumen del sólido resultante?

40) Encuentre el volumen de la región que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, entre los planos $y + z = 4$, $z = 0$.

41) Encuentre el volumen de la región limitada por los paraboloides $z = 5 - x^2 - y^2$, $z = 4(x^2 + y^2)$.

42) Encuentre el volumen de la sección cortada del cilindro $x^2 + y^2 \le 1$ por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

43) Encuentre el volumen de la región limitada abajo y arriba por los paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = 1 + x^2 + y^2$, al interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

44) Encuentre el volumen del sólido cilíndrico que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9a^2$, por fuera del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y por dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4a^2$.

45) Encuentre el volumen del sólido cilíndrico que se encuentra limitado arriba y abajo por el cono $z^2 = x^2 + y^2$, lateralmente por fuera del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y por dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4a^2$.

Use coordenadas esféricas para resolver los problemas del 46 al 63.

46) Considere el sólido que se encuentra al interior del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dentro del hemisferio superior de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

a) Encuentre el volumen del sólido.

b) Si la densidad volumínica es 1, ¿Cuál es el momento de inercia con respecto al eje X, eje Y y eje Z?

47) Encuentre la masa de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se encuentra en el primer octante, si la densidad volumínica en cualquier punto de la esfera es proporcional a la distancia del punto al centro de la base.

48) Obtenga la masa del cascarón esférico limitado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; si la densidad volumínica en cualquier punto es $k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

49) Encuentre el volumen de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se encuentra por fuera del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

50) Encuentre el volumen del sólido limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$, y que se encuentra en el interior del cono $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$.

51) Calcule el centro de gravedad de un cono circular recto sólido y homogeneo de altura h y radio r.

52) Encuentre el volumen del sólido limitado superiormente por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, ($z > 0$), e inferiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$.

53) Encuentre el volumen del sólido limitado por el cardioide de revolución $(x^2 + y^2 + z^2) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z$.

54) Calcule el volumen del sólido limitado inferiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, y superiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

55) Encuentre el volumen del casquete más pequeño cortado de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ por el plano $z = 1$.

56) Encuentre el volumen de sólido que se encuentra por dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y por fuera del cono $3z^2 = x^2 + y^2$.

57) Encuentre el volumen del sólido encerrado por el cono z = $\sqrt{x^2 + y^2}$, entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

58) Encuentre el volumen del sólido limitado abajo por el plano XY, lateralmente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, y arriba por el cono $3z^2 = x^2 + y^2$.

59) Encuentre el volumen de la región limitada superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

60) Encuentre el volumen del sólido que se encuentra por dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y por fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

61) Encuentre el volumen del sólido limitado superiormente por el cono z = $\sqrt{3x^2 + 3y^2}$, inferiormente por el cono z = $\sqrt{x^2 + y^2}$, lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

62) Encuentre el volumen del sólido limitado superiormente por el cono z = $\sqrt{3x^2 + 3y^2}$, inferiormente por el cono z = $\sqrt{x^2 + y^2}$, al interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$.

63) Calcule el volumen del sólido que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, limitado superiormente por $z^2 = x^2 + y^2$, inferiormente por el plano XY.

Resuelvas los siguientes problemas, haciendo el cambio de variables recomendado:

64) Resuelva cada sistema y encuentre el valor del jacobiano $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ o $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$:

a) $u = x - y$; $v = 2x + y$

b) $u = x + 2y$; $v = x - y$

c) $u = 3x + 2y$, $v = x + 4y$

d) $u = 2x - 3y$; $v = -x + y$

e) $x = uCos(v)$; $y = uSen(v)$

f) $x = e^u Sen(v)$; $y = e^u Cos(v)$

g) $x = uCos\theta - vSen\theta$; $y = uSen\theta + vCos\theta$.

h) $x = 2u - 1$; $y = 3v - 4$; $z = (w - 4)/2$

i) $x/a = u$; $y/b = v$; $z/c = w$

65) Considere la región R en el sistema rectangular XY limitada por el paralelogramo con vértices en A(0,0), B(1,2), C(3,3) y D(2,1). Encuentre la imagen de la región R y dibújela en el plano UV, bajo cada una de las siguientes transformaciones:

a) $u = x - y$; $v = 2x + y$

b) $u = x + 2y$; $v = x - y$

c) $u = 3x + 2y$, $v = x + 4y$

d) $u = 2x - 3y$; $v = -x + y$

e) $u = x^2 + y^2$; $v = x^2 - y^2$

66) Use la transformación ($u = x - y$; $v = 2x + y$), para evaluar la integral $\iint_R (2x^2 - xy - y^2)dxdy$ para la región en el primer cuadrante del plano XY limitada por las rectas $y = -2x+4$, $y = -2x+7$, $y = x-2$, $y = x+1$.

67) Use la transformación ($u = 3x + 2y$, $v = x + 4y$), para evaluar la integral $\iint_R (3x^2 + 14xy + 8y^2)dxdy$ para la región en el primer cuadrante del plano XY limitada por las rectas $y = -\frac{3}{2}x + 1,\ y = -\frac{3}{2}x + 3,\ y = -\frac{1}{4}x,\ y = -\frac{1}{4}x + 1.$

68) Use la transformación ($u = 2x - 3y$; $v = -x + y$), para evaluar la integral $\iint_R 2(x - y)dxdy$ para la región limitada por el paralelogramo del plano XY con fronteras $x = -3$, $x = 0$, $y = x$, $y = x+1$.

69) Use la transformación ($x = u/v$; $y = uv$), para evaluar la integral $\iint_R (\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy})dxdy$ para la región en el primer cuadrante del plano XY limitada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 9$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.

70) Una placa delgada de densidad constante cubre la región limitada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el plano XY. Use la transformación ($x = arCos\theta$, $y = brSen\theta$) para calcular el primer momento de la placa respecto al origen.

71) Use la transformación ($x = au$; $y = bv$) para calcular el área limitada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

72) Use la transformación ($u = x + 2y$; $v = x - y$) para evaluar la integral $\int_0^{2/3} \int_y^{2-2y} (x + 2y)e^{y-x} dxdy$.

73) Use la transformación ($x = u + 0.5v$; $y = v$) para evaluar la integral $\int_0^{2} \int_{y/2}^{(y+4)/2} (2x - y)y^3 e^{(2x-y)^2} dxdy$.

74) Use la transformación ($x = au$; $y = bv$; $z = cw$) para calcular el volumen del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

75) Sea D la región en el espacio XYZ definida por las desigualdades $1 \le x \le 2$, $0 \le yx \le 2$, $0 \le z \le 1$. Evalúe la integral $\iiint_D (x^2 y + 3xyz)dxdydz$, aplicando la transformación ($u = x$; $v = xy$; $w = 3z$).

76) Use la transformación ($u = x + y$; $v = x - y$), para calcular $\iint_R e^{x+y}dxdy$ en la región R = $\{$ (x,y) : -1 ≤ x ≤ 1, |x| – 1 ≤ y ≤ 1 – |x| $\}$.

77) Use la transformación ($u = x + y$; $v = x - y$), para calcular $\iint_R (x+y)^2 Sen^2(x-y)dA$ en la región cuadrada con vértices A(0,1), B(1,2), C(2,1) y D(1,0)

78) Use la transformación $(u = \frac{1}{5}(2x + y)$; $v = \frac{1}{5}(x - 2y))$ para calcular la integral $\iint_R (2x + y)Arctan(x - 2y)dydx$, donde R es la región del plano XY limitada por el paralelogramo con vértices A(0,0), B(1,1), C(2,1) y D(1,0).

79) Use la transformación (x = u ; y = v/u) para calcular $\iint_R \frac{xy}{1 + x^2 y^2} dA$, donde R es la región acotada por las líneas $xy = 1$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$

80) Use un cambio de variables para calcular $\iint_R \sqrt{(x - y)(x + 4y)}dA$, donde R es la región limitada por el paralelogramo con vértices A(0,0), B(1,1), C(5,0) y D(4,-1).

81) Use un cambio de variables para calcular $\iint_R (x + y)^2 Sen^2(x - y)dA$, donde R es la región cuadrada con vértices A(π,0), B(3π/2,π/2), C(π,π) y D(π/2,π/2).

82) Use un cambio de variables para calcular $\iint_R (3x + 2y)^2 \sqrt{2y - x}dA$, donde R es la región limitada por el paralelogramo con vértices A(0,0), B(-2,3), C(2,5) y D(4,2).

83) Use un cambio de variables para calcular $\iint_R \sqrt{x + y}dA$, donde R es la región triangular de vértices A(0,0), B(a,0) y C(0,a). ($a > 0$)

84) Use un cambio de variables para calcular $\iint_R \ln\left(\frac{x - y}{x + y}\right)dydx$, donde R es la región triangular de vértices A(1,0), B(4,-3) y C(4,1).

85) Use un cambio de variables adecuado para calcular $\iiint_S e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dV$, donde S es la región limitada por las superficies z = $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, z = $\sqrt{9 - x^2 - y^2}$, z = $\sqrt{3x^2 + 3y^2}$, z = $\sqrt{x^2 + y^2}$.