CÁLCULO VECTORIAL
GUIA No 5

APLICACIONES DE LA DERIVADA

1. Criterios de la derivada

Definición valor extremo: Si $f(x,y)$ està definida en una regiòn R y P_0=(a,b) es un punto de R, entonces:

a) $f(a,b)$ es un valor máximo local de f si $f(a,b) \geq f(x,y)$ para todos los puntos del dominio de f pertenecientes a una vecindad abierta de (a,b).

b) $f(a,b)$ es un valor mínimo local de f si $f(a,b) \leq f(x,y)$ para todos los puntos del dominio de f pertenecientes a una vecindad abierta de (a,b).

Teorema de la primera derivada: Si $f(x,y)$ tiene un valor máximo o mínimo local en un punto interior (a,b) de su dominio, y si las primeras derivadas parciales existen en (a,b), entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$.

Puntos críticos: Si (a,b) es un punto interior del dominio de f y, si $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$, y $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ o $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ no existe, entonces (a,b) es un punto critico de f. Un punto critico (a,b) es un punto de silla del dominio de f, si en una vecindad del punto (a,b) se encuentran puntos (x,y) para los cuales se tiene que $f(x,y) > f(a,b)$ y $f(x,y) < f(a,b)$.

Teorema de la segunda derivada: Si f, sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas en una vecindad de (a,b) y además $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ entonces:

a) f tiene un máximo local en (a,b) si $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2 > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$.
b) f tiene un mínimo local en (a,b) si $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2 > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$.
c) f tiene un punto de silla en (a,b) si $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2 < 0$.
d) No se puede concluir, cuando $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2 = 0$.

Ejercicios Propuestos

1) Determinar los extremos relativos de las siguientes funciones, si existen:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$

(b) $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

(c) $f(x,y) = x^{-1} - 64y^{-1} + xy$

(d) $f(x,y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$

(e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 18xy$

(f) $f(x,y) = (2x + 2y + 1)/(x^2 + y^2 + 1)$

(g) $f(x,y) = Sen(x)\, Sen(y)$

(h) $f(x,y) = e^x Sen(y)$

2) Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$

(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$

(c) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$

(d) $f(x,y) = (x - y)(1 - xy)$

(e) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

(f) $f(x,y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$

3) Dividir 120 en tres partes de manera que la suma de los productos tomados de dos en dos sea máxima.

4) Determinar el punto del plano $2x - y + 2z = 16$ más próximo al origen.

5) Determinar tres números positivos x,y,z tales que $x + y + z = 18$ y xyz sea máximo.

6) Determinar tres números positivos x,y,z tales que $xyz = 27$ y $x + y + z$ sea mínimo.

7) Hallar el máximo volumen de una caja paralelepipédica sin tapa superior cuya área total es de 108 metros cuadrados.

8) Hallar la mínima área total de una caja paralelepipédica sin tapa superior de 500 metros cúbicos de volumen.

9) Encuentre la distancia máxima entre el origen y la superficie $z^2 = x^2y + 4$.

10) Una caja rectangular cuyas aristas son paralelas a los ejes coordenados está inscrita en el elipsoide $96x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 36$. ¿Cuál es el máximo volumen posible para dicha caja?

11) Calcule el volumen del paralelepípedo rectangular más grande que pueda ser inscrito en el elipsoide $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ si las aristas son paralelas a los ejes coordenados.

12) Se desea fabricar una caja rectangular cerrada con un volumen de 16 pie^3 usando tres tipos de materiales. El costo del material que llevará en las partes superior e inferior cuesta \$ 0.18 por pie^3; el de las partes anteriores y posteriores cuesta \$ 0.16 pie^3, y el de los dos lados restantes cuesta \$ 0.12 por pie^3. Calcule las dimensiones de la caja que tenga costo de material mínimo.

13) Una inyección de **x** miligramos de un medicamento A, y **y** miligramos de un medicamento B, produce una respuesta de R unidades y $R = x^2y^3(c-x-y)$, donde c es una constante positiva. ¿Qué dosis de cada fármaco ocasiona una respuesta máxima?

14) Un fabricante monopolista vende dos tipos de lámparas. Se sabe que si produce **x** lámparas del primer tipo y **y** lámparas del segundo tipo, se pueden vender, respectivamente, a $(100 - 2x)$ y a $(125 - 3y)$ dólares cada una. El costo de fabricación de **x** lámparas del primer tipo y **y** lámparas del segundo tipo es $(12x + 11y + 4xy)$ dólares. ¿Cuántas lámparas de cada tipo se deben fabricar a fin de lograr una utilidad máxima y cuál puede ser dicha utilidad?

15) Determinar las dimensiones relativas de una caja rectangular sin tapa y con volumen determinado V_0, si se quiere utilizar la mínima cantidad de material en su manufactura.

2. Multiplicadores de Lagrange

Extremo condicionado: Se llama extremo condicionado de una función f, al máximo o mínimo alcanzado por f, con la condición de que sus argumentos estén ligados entre sí por la ecuación de enlace $g=0$. Para hallar los extremos condicionados o relativos de f con respecto a g se determinan los puntos críticos de la función auxiliar $F = f - \lambda g$, los cuales se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta cuando igualamos a cero las derivadas de F con respecto a cada uno de sus argumentos. La función auxiliar F se llama función de Lagrange y la constante indeterminada λ se llama multiplicador de Lagrange. Si f es una función de n variables estará restringida máximo a n-1 ecuaciones de enlaces y se necesitará un multiplicador por cada ecuación de enlace.

Teorema de Lagrange: Supongamos que f y g tienen derivadas parciales continuas y que f tiene un extremo en $P_0(x_0,y_0,z_0)$ sobre la curva lisa de restricción $g(x,y,z) = c$. Si $\nabla g(P_0) = 0$, entonces existe un número λ tal que $\nabla f(P_0) = \lambda\nabla g(P_0)$.
El teorema indica que los valores extremos de una funciòn $f(x,y,z)$, cuyas variables estàn sujetas a una restricciòn $g(x,y,z) = 0$, se encontraràn sobre la superficie $g(x,y,z) = 0$ en los puntos donde $\nabla f = \lambda\nabla g$ para algùn escalar λ llamado **multiplicador de Lagrange**.

Método de Lagrange: Para el caso una función de 3 variables independientes $f(x,y,z)$ restringida a una ecuación de enlace $g(x,y,z)=0$ se tiene que la función auxiliar es $F(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$. Para obtener los puntos críticos de F se resuelve el sistema $\partial F/\partial x=0$, $\partial F/\partial y=0$, $\partial F/\partial z=0$, $\partial F/\partial \lambda=0$. Entre los puntos críticos de F estarán los extremos de f. Si P es un punto crítico de F, entonces f tendrá un máximo condicionado en P si $d^2F(P) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 < 0$, y f tendrá un mínimo condicionado en P si $d^2F(P) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 > 0$.

Ejercicios Propuestos

1) Encuentre los extremos de la función $z = 6 - 4x - 3y$ si las variables x e y satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

2) Hallar los extremos de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$ restringida a $x^2 + y^2 = 1$.

3) Encuentre los extremos condicionados de $u = x^2 + y^2 + z^2$, de tal manera que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. ($a>0, b>0, c>0$).

4) Hallar los valores máximo y mínimo de $f(x,y) = y^2 - x^2$ sobre la elipse $0.25x^2 + y^2 = 1$.

5) Hallar el mínimo de la función $f(x,y,z) = 3x + 2y + z + 5$, sujeto a la restricción $g(x,y,z) = 9x^2 + 4y^2 - z = 0$.

6) Hallar el mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $g(x,y) = xy - 3 = 0$

7) Hallar el máximo de $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

8) Hallar los extremos de $f(x,y,z) = x + z$ restringida a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

9) Hallar el mínimo de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a la restricción $x + 3y - 2z = 12$.

10) Hallar el mínimo de $f(x,y,z) = 4x - 2y + 3z$ sujeto a la restricción $2x^2 + y^2 - 3z = 0$.

11) Encuentre los máximos y mínimos de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la condición de que $xyz = 1$.

12) Determine los extremos de $f(x,y,z) = x + y + z$ si $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

13) Hallar los puntos extremos de $f(x,y,z) = x + y + z$ sujeta a las condiciones $x^2 + y^2 = 2$ y $x + z = 1$.

14) Determinar los extremos de $u = xyz$ con las condiciones $x + y + z = 5$ y $xy + yz + xz = 8$.

15) Obtenga un extremo relativo de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ con las restricciones $x + 2y + 3z = 6$, $x - y - z = -1$.

16) Encuentre un extremo de la función $f(x,y,z) = xyz$ sujeta a las restricciones $x + y + z = 4$ y $x - y - z = 3$.

17) Encuentre los extremos de la función $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ relativos a los planos $x + y + z = 1$ y $x + y - z = 0$.

18) Encuentre el máximo y el menor valor de $z = ax + by$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

19) Encuentre el máximo valor de $f(x,y) = 0.5ab - x^2 - y^2$ sobre la recta $ax + by = ab$.

20) Encuentre los puntos sobre la curva $xy^2 = 54$ más cercanos al origen.

21) Encuentre los puntos sobre la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donde $f(x,y) = xy$ tiene sus valores extremos.

22) ¿Cómo deben ser los ángulos de un triángulo, para que el producto de los senos de sus ángulos sea máximo?.

23) Determine la menor y la mayor distancia del origen a un punto del elipsoide $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$.

24) Encuentre la menor distancia que hay entre el origen de coordenadas y la línea donde se intersecan los planos $x + y + z = 8$ y $2x - y + 3z = 28$.

25) Encuentre la distancia más corta entre el punto P(1,-1,-1) y el plano $x + 4y + 3z = 2$.

26) Encontrar las dimensiones de la caja rectangular de mayor volumen cuya área de la superficie sea igual a S_0 metros cuadrados.

27) Encuentre las dimensiones del recipiente cilíndrico circular recto cerrado de menor área de superficie cuyo volumen sea V_0.

28) Calcule la distancia más corta desde el origen al plano $Ax + By + Cz = D$.

29) Encuentre los valores extremos de $f(x,y,z) = x^2yz + 1$ sobre la intersección del plano $z = 1$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10$.

30) ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro circular recto abierto de mayor área de superficie que puede inscribirse en una esfera de radio R?

31) Hallar el máximo volumen de una caja paralelepipédica sin tapa superior cuya área total es de 108 metros cuadrados.

32) Hallar la mínima área total de una caja paralelepipédica sin tapa superior de 500 metros cúbicos de volumen.

33) Encuentre tres números reales cuya suma sea 9 y la suma de sus cuadrados sea tan pequeña como sea posible.

34) Encuentre la distancia máxima entre el origen y la superficie $z^2 = x^2y + 4$.

35) Calcule el volumen del paralelepípedo rectangular más grande que pueda ser inscrito en el elipsoide $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ si las aristas son paralelas a los ejes coordenados.

36) Encuentre el volumen máximo de una caja rectangular cerrada en el primer octante con tres caras en los planos coordenados y un vértice sobre el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, donde $a>0, b>0, c>0$.

37) Una sonda espacial con la forma del elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ entra en la atmósfera de la tierra y su superficie comienza a calentarse. Después de una hora, la temperatura en el punto (x,y,z) sobre la superficie de la sonda está dada por $T(x,y,z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$. Encuentre el punto más caliente sobre la superficie de la sonda.

38) Determinar las dimensiones relativas de una caja rectangular sin tapa y con volumen determinado V_0, si se quiere utilizar la mínima cantidad de material en su manufactura.

39) Dentro de una caja tiene la forma del cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, se coloca una placa que es la porción triangular del plano $x + y + z = 1$. Se calienta la caja de tal manera que la temperatura en el punto (x,y,z) es $T(x,y,z) = 4 - 2x^2 - y^2 - z^2$ en cientos de grados centígrados. Encuentre los puntos más calientes y más fríos de la placa.

40) La temperatura en un punto (x,y) sobre una placa metálica es $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Una hormiga camina sobre la placa alrededor del origen manteniendo una distancia fija de 5 unidades. ¿En que puntos tiene mayor posibilidad de sucumbir la hormiga, por causa de temperaturas extremas?