CÁLCULO VECTORIAL

GUIA No 4

DERIVADA DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

1. Teoremas de Derivadas

Derivada parcial: La derivada parcial de *f(x,y)* respecto a la variable x en el punto (x_0,y_0) es $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$, siempre que el límite exista. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $z = f(x,y_0)$ en el punto $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ en el plano $y = y_0$. La derivada parcial de *f(x,y)* respecto a la variable y en el punto (x_0,y_0) es $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$, siempre que el límite exista. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $z = f(x_0,y)$ en el punto $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ en el plano $x = x_0$.

Si $u = f(v_1,v_2,v_3, \ldots v_k, \ldots , v_n)$ es una función de n variables independientes, entonces la derivada parcial de f con respecto a la variable independiente v_k se define como $\frac{\partial f}{\partial v_k}(v_1, v_2, \ldots v_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(v_1, v_2, \ldots, v_k + h, \ldots, v_n) - f(v_1, \ldots, v_n)}{h}$.

Teorema de Euler: Si *f(x,y)* y sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ están definidas en toda una región abierta que contenga un punto (x_0,y_0) y son todas continuas en (x_0,y_0), entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Teorema del incremento: Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ están definidas en una región que contiene al punto (x_0,y_0) y son continuas en (x_0,y_0), entonces el **incremento** de f cuando se pasa de (x_0,y_0) a $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$, está dado por $\Delta z = f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$; este incremento satisface la ecuación $\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta x$.

Diferenciabilidad: f es una función diferenciable en el punto (x_0,y_0) si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existen, y si satisface la ecuación $\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \in_1\Delta x + \in_2\Delta x$, donde $\in_1\Delta x + \in_2\Delta x \to 0$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ son continuas en toda una región R, entonces f es diferenciable en todo punto de la región R. Si una función $f(x,y)$ es diferenciable en (x_0,y_0), entonces f es continua en (x_0,y_0), y su **diferencial total** está dada por la expresión $df = dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy$. La medida del cambio de f se puede calcular aplicando el teorema del incremento y se puede estimar aplicando la definición de diferencial total, así:

	CALCULO	ESTIMACION
Cambio Absoluto	Δf	df
Cambio Relativo	$\Delta f / f(x_0, y_0)$	$df / f(x_0, y_0)$
Cambio Porcentual	$[\Delta f / f(x_0, y_0)]x100$	$[df / f(x_0, y_0)]x100$

Aproximación lineal: Si f es diferenciable en un punto (x_0,y_0), entonces su aproximación lineal en el punto (x_0,y_0) está dada por la función $L(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$. Si $[x_0-h,x_0+h]x[y_0-k,y_0+h]$ es un rectángulo contenido en una región R donde las primeras y segundas derivadas de f son continuas, entonces el error en que se incurre se puede estimar mediante la expresión $|E(x,y)| \leq \frac{1}{2}M\left(|x-x_0|+|y-y_0|\right)^2$, donde M es una cota superior del conjunto $\{ |f_{xx}|, |f_{xy}|, |f_{yy}| \}$.

Ejercicios Propuestos

1) Hallar las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

b) $f(x,y)=\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$

c) $f(x,y,z)=\frac{Sen(xy)+Cos(xz)}{Tan(yz)}$

d) $f(x,y,z)=Arc\tan\left(\frac{xTan(z)}{y}\right)$

e) $f(x,y,z)=xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)$

f) $f(x,y,z)=\ln\left(\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)$

g) $f(x,y,z)=xyze^{xyz}(xy+xz+yz)$ h) $f(x,y,z)=\dfrac{Senh(xy-z^2)}{xy-z^2}$

i) $f(x,y)=x^y+y^x$ j) $f(x,y,z)=Sen^{-1}\left(\dfrac{xyz}{x+y+z}\right)$

k) $f(x,y)=\log_x(y)$ l) $f(x,y)=\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)^{xy}$

m) $f(x,y,z)=x^x+y^y+z^z$ n) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{Sen(xy)}}{xy}$

2) Hallar las derivadas de orden superior que se indican en cada caso:

a) $f(x,y)=\log\left(x^2+y^2\right)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$

b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$

c) $f(x,y,z)=Sen(x+y)Cos(y+z)$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y,z)$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(x,y,z)$

d) $f(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y,z)$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}(x,y,z)$

e) $f(x,y,z)=(xyz)^2 e^{(xyz)^2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)$

3) La intersección de la superficie z = f(x,y) y el plano $x = x_0$ es una curva plana $z=f(x_0,y)$; y la intersección de la superficie z = f(x,y) con el plano $y = y_0$ es la curva plana $z = f(x,y_0)$. Para cada uno de los siguientes casos, encuentre la pendiente de la tangente a la curva de intersección en el punto dado.

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$; $x = 3$; P(3,4,5)

b) $f(x,y)=Sen(x)Cos(y)$; y = □/4 ; P(□/4,□□/4,1/2)

c) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$; $x = e$; P(e,0,2)

d) $f(x,y)=(x+y)e^{-xy}$; $y = 2$; P(0,2,2)

e) $f(x,y)=\dfrac{x^4}{x^2+y^2}$; $x = 2$; P(2,2,2)

4) Supóngase que existe una función $z = f(x,y)$ que satisface la ecuación dada y que las derivadas parciales existen. En cada caso encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial x}{\partial z}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$:

a) $yz^2 - \ln\sqrt{y} = x^2 + y^2$

b) $x^3 - xy^2 + yz^2 - z^3 = 5$

c) $Sen(x+z) - Cos(z-y) = xyz$

d) $x^3 + y^3 + z^3 + Sen(xz) + Cos(yz) = 15$

e) $e^z + x^2\log(z) + y = 0$

f) $xy + z^3x - 2yz = 0$ en $(1,1,1)$

5) Los ángulos de un triángulo escaleno son A, B y C, y los lados correspondientes a estos ángulos son a, b y c.

a) Exprese A como f(a,b,c) y calcule , $\frac{\partial A}{\partial a}$ y $\frac{\partial A}{\partial b}$.

b) Exprese a implícitamente como f(A,b,B) y calcule , $\frac{\partial a}{\partial A}$ y $\frac{\partial a}{\partial B}$.

6) Supóngase que u y v son dos funciones dadas en x e y que satisfacen el sistema de ecuaciones dado. En cada caso, encuentre las derivadas indicadas:

a) $u^2 - v^2 = x$; $2uv = y$

Encuentre $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

b) $v\ln(u) = x$; $u\ln(v) = y$

Encuentre $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

c) $u = x^2 - y^2$; $v = x^2 + y^2$

Encuentre $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$.

d) $uCos(v) = x + 1$; $uSen(v) = x + y$

Encuentre $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

e) $Log(u+v) = e^{xy}$; $Log(x+y) = e^{uv}$

Encuentre $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial v}$.

7) Supóngase que *u, v* y *w* son tres funciones dadas en *x, y* y *z* que satisfacen el sistema de ecuaciones dado. En cada caso, encuentre las derivadas indicadas:

a) $x^2 - yCos(w) + z^2 = 5$; $x^2 + y^2 - Sen(uv) = 8 - 2z^2$; $xy = Sen(u)Cos(v) + z$

Encuentre $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$.

b) $Sen(uv) - Cos(u/v) + w = x$; $Sen(v) + Cos(v) - uw = y$; $Sen(uv) + Cos(vw) = z$.

Encuentre $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

c) $e^{uv} + uw = xy$; $ln(u+v) - w = yz$; $ln(u-w) + v^2 = x + y + z$.

Encuentre $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z}$.

d) $uv + vw + w = xy$; $u - vw - w = yz$; $u + vw + uw = xz$.

Encuentre $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial v}$.

e) $uvw = x + y + z$; $u + v + w = xyz$; $u^2 + v^2 + w^2 = \sqrt{}xyz$

Encuentre $\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

8) Verifique que las siguientes ecuaciones satisfacen la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$:

a) $f(x, y) = \ln \sqrt{(x^2 + y^2)}$

b) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

9) Verifique que las siguientes funciones satisfacen la ecuación de onda $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$:

a) $w = Sen(x + ct) + Cos(2x + 2ct)$

b) $w = 5Cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$

c) $w = Tan(2x - 2ct)$

10) Hallar la pendiente de la tangente a la curva de nivel dada en el punto P:

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$; P(1,1,5)

b) $f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^3$; P(1,1,3)

c) $f(x,y) = xy^3 + x^3y$; P(1,-1,-2)

11) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$:

a) $f(x, y) = \int_x^y (u^2 + 2u + 1)du$

b) $f(x,y)=\int_x^y \sqrt{t^2+a^2}\,dt$

c) $f(x,y)=\int_y^x \frac{e^{w^2}}{w+1}\,dw$

12) ¿Qué relación debe existir entre *a, b* y *k* para que una función de la forma *C(x,t)* = e^{ax+bt} satisfaga la ecuación de difusión $\frac{\partial C}{\partial t}=k\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$?

13) Pruebe que la función $C(x,t) = t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2 t}{4k}}$ satisface la ecuación de difusión.

14) Para cada una de las siguientes funciones, encuentre la aproximación lineal de *f* en el punto dado, y acote la magnitud del error $|E|$ sobre la región dada:

a) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 5$; P(2,1) ; $|x-2|\le 0.1$, $|y-1|\le 0.1$

b) $f(x,y) = 1 + y + x\text{Cos}(y)$; P(0,0) ; $|x|\le 0.2$, $|y|\le 0.2$

c) $f(x,y) = xy^2 + y\text{Cos}(x-1)$; P(1,2) ; $|x-1|\le 0.1$, $|y-2|\le 0.1$

d) $f(x,y) = e^x\text{Cos}(y)$; P(0,0) ; $|x|\le 0.1$, $|y|\le 0.1$

e) $f(x,y) = \ln(x) + \ln(y)$; P(1,1) ; $|x-1|\le 0.2$, $|y-1|\le 0.2$

f) $f(x,y,z) = xy + 2yz - 3xz$; P(1,1,0) ; $|x-1|\le 0.01$, $|y-1|\le 0.001$, $|z|\le 0.01$

g) $f(x,y,z) = \sqrt{2}\,\text{Cos}(x)\,\text{Sen}(y+z)$; P(0,0,π/4) ; $|x|\le 0.01$, $|y|\le 0.01$, $|z-\pi/4|\le 0.01$

h) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; P(1,2,2) ; $|x-1|\le 0.1$, $|y-2|\le 0.1$, $|z-2|\le 0.1$

i) $f(x,y,z) = \text{Sen}(xy) / z$; P(2,0,1) ; $|x-2|\le 0.2$, $|y|\le 0.2$, $|z-1|\le 0.1$

j) $f(x,y,z) = \text{Arctan}(xyz)$; P(1,1,1) ; $|x-1|\le 0.1$, $|y-1|\le 0.2$, $|z-1|\le 0.1$

15) Muestre que las siguientes funciones dada no son diferenciables en (0,0):

a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

16) Considere la función $f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4}, & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 \quad , & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$

a) Muestre que $D_1f(0,0,0)$, $D_2f(0,0,0)$ y $D_3f(0,0,0)$ existen.

b) Muestre que f no es diferenciable en (0,0,0).

17) Si $f(x,y) = 3x^2 + 2xy - y^2$; evalúe:

a) $\Delta f(1,4)$, el incremento de f en (1,4)

b) $\Delta f(1,4)$ cuando $\Delta x = 0.03$ y $\Delta y = -0.02$

c) df(1,4), la diferencial total de f en (1,4)

d) df(1,4) cuando dx = 0.03 y dy = -0.02

18) Si $f(x,y) = xye^{xy}$, determine:

a) $\Delta f(2,-4)$, el incremento de f en (2,-4)

e) $\Delta f(2,-4)$ cuando $\Delta x = -0.1$ y $\Delta y = 0.2$

f) df(2,-4), la diferencial total de f en (2,-4)

g) df(1,4) cuando dx = -0.1 y dy = 0.2

19) Si $f(x,y,z) = xy + \ln(yz)$; obtener:

h) $\Delta f(4,1,5)$, el incremento de f en (4,1,5)

i) $\Delta f(4,1,5)$ cuando $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = 0.04$ y $\Delta z = -0.03$

j) df(4,1,5), la diferencial total de f en (4,1,5)

k) df(4,1,5) cuando dx = 0.02 , dy = 0.04 y dz = -0.03

20) Use diferenciales para resolver los siguientes problemas:

a) Una compañía fabrica tanques cilíndricos circulares rectos, que tiene 50 dm de altura y 10 dm de radio.
   - ¿Cómo varía el volumen del tanque por cada unidad que varíe el radio?
   - ¿Cómo varía el volumen del tanque por cada unidad que varíe la altura?
   - Si se invierten los valores del radio y la altura, ¿Cómo varía el volumen del tanque por cada unidad que varíe el radio?, ¿Cómo varía el volumen del tanque por cada unidad que varíe la altura?
   - Si la medida de la altura se disminuye a 49.9 dm y el radio se incrementan a 10.1 dm, ¿Qué tanto cambia el volumen?

- Si los errores relativos dr/r y dh/h no sobrepasan el 3% y el 1% respectivamente, ¿Cuál es el máximo error en el cálculo del volumen?

b) Supóngase que T se determina con la fórmula $T(x,y) = x(e^y + e^{-y})$, donde $(x,y) = (2,\ln 2)$ con errores máximos posibles de $|dx| = 0.1$ y $|dy| = 0.02$; Estime el máximo error posible en el valor calculado de *T*.

c) Se quiere calcular el área de un rectángulo largo y delgado a partir de las medidas de su longitud y ancho. ¿Qué dimensión debe medir más cuidadosamente?

d) Si r = 5 cm, h = 12 cm; al milímetro más cercano, ¿Cuál será el máximo error porcentual al calcular $V = \pi r^2 h$?

e) Estime cuánta madera es necesaria para hacer una caja rectangular hueca cuyas medidas interiores son 5 ft de largo, 3 ft de ancho y 2 ft de profundidad, si la caja estará hecha con tablones de 1/2 pulgada de espesor y no tendrá tapa? (12 pulgadas = 1 pie)

f) Las medidas tomadas al radio de la base y la altura de un cono circular recto resultaron ser de 10 cm y 25 cm, respectivamente; con una tolerancia de error en la medición de 0.1 cm en cada caso. Estime el error máximo en el cálculo del volumen del cono.

g) En cierta fábrica la producción es de $P(x,y) = 60\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ unidades; donde x representa el capital invertido (en millares de euros), e y representa la fuerza laboral (en horas de trabajo). Actualmente se invierten 900.000 euros y se emplean 1000 horas/trabajo. Estime la variación de la producción que resultará cuando se aumenta la inversión en 1000 euros, y se disminuye en 2 el número de horas de trabajo.

h) El sistema cardiovascular humano opera en forma semejante a circuitos eléctricos conectados en serie y en paralelo. Cuando la sangre fluye a través de dos resistencias en paralelo x, y, entonces la resistencia equivalente z del circuito es $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Si los porcentajes de error al medir x e y son ±0.2% y ±0.6% respectivamente. Calcule el porcentaje del máximo error aproximado de z.

i) Según la ley de Poiseville, la resistencia al flujo que ofrece un vaso sanguíneo cilíndrico de radio r y longitud x es $R(r,x) = cx/r^4$, donde C es una constante. Estime la variación porcentual de R cuando x aumenta un 3% y r decrece un 2%.

j) Si se mezclan x moléculas-gramo de ácido sulfúrico con y moléculas-gramo de agua, el calor liberado viene dado por la fórmula $C(x,y) = \dfrac{1.786xy}{1.798x + y}$. Si se parte de 5 moléculas-gramo de ácido y 4 moléculas-gramos de agua, y se aumentan respectivamente a 5.01 y 4.04; ¿Cuánto calor adicional se genera?

k) En una tienda se venden dos tipos de marcas de jugos. El beneficio semanal es $B(x,y) = (x-30)(70-5x+4y)+(y-40)(80+6x-7y)$ euros, donde x es el precio en céntimos de cada jugo de la primera marca, e y es el precio de cada jugo de la segunda marca. El precio actual de la primera merca es de 50 céntimos por jugo y el de la segunda 52 céntimos. Use una diferencial total para estimar la variación del beneficio semanal si se suben los precios 1 y 2 céntimos respectivamente.

l) Sea A el área de un triángulo de lados *a* y *b* que forman un ángulo de θ radianes. Supóngase que $\theta = \pi/6$, que *a* crece un 4% mientras que *b* decrece un 3%. Use diferenciales para estimar el cambio porcentual de A.

m) Un recipiente de metal, cerrado, en forma de cilindro circular recto debe tener una altura interior de 6 pulgadas, un radio interior de 2 pulgadas y un espesor de 0.1 pulgadas. Si el costo del metal que será usado es de 10 pesos por pulgada cúbica, determine con diferenciales el costo del metal en la manufactura del recipiente.

n) Un recipiente cerrado en forma de prisma rectangular debe tener una longitud interior de 8 m, una anchura interior de 5 m, una altura interior de 4 m, y un espesor de 4 cm. Use diferenciales para calcular aproximadamente la cantidad de material necesario para construir el recipiente.

o) Una empresa va a fabricar 10.000 cajas de madera cerradas cuyas dimensiones serán de 3 m, 4m y 5m. El costo de la madera que se empleará es de 1 dólar por metro cuadrado. Si las máquinas que se utilizan para cortar la madera tienen un error posible de 0.5 cm en cada una de las dimensiones. Calcule aproximadamente, usando diferencial total, el máximo error posible en el cálculo del costo de la madera.

p) Si R es la resistencia total de tres resistores, conectados en paralelo, con resistencias R_1, R_2, R_3, entonces $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. Si las medidas de las resistencias son $R_1 = 25$ ohmios, $R_2 = 40$ ohmios y $R_3 = 50$ ohmios, con errores posibles del 0.5% en cada caso, estime el error máximo en el valor calculado de R.

q) Calcular aproximadamente, la variación de longitud que experimenta la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 cm y 8 cm, cuando el primero se alarga 1/4 cm y el segundo se reduce 1/8 cm.

r) Al levantar topográficamente un terreno triangular, se han medido dos de sus lados y el ángulo entre dichos lados a, b y C. Se han obtenido las medidas 150 ft, 200 ft y 60º respectivamente. ¿Qué error podría tener el cálculo del área del terreno, si en la medición hay errores 1/2 ft, 1/2 ft y 2º, respectivamente.

s) Un prisma triangular regular hueco se fabricó con un acrílico de 0.5 cm de espesor. El lado interior y la altura interior del prisma son de 15 cm y 30 cm respectivamente. Use diferenciales para calcular el volumen del material gastado.

t) Si se quiere calcular el volumen de un cilindro circular recto, donde la altura es el cuádruplo del radio, ¿Con cuál medida se debe tener mayor cuidado?

u) Si se quiere calcular el volumen de un cilindro circular recto, donde el radio es el cuádruplo de la altura, ¿Con cuál medida se debe tener mayor cuidado?

2. Regla de la cadena

Para derivar funciones compuestas de varias variables se tienen las siguientes reglas:

1) Si w = f(x,y) es diferenciable, x = x(t), y = y(t) son funciones diferenciables de t, entonces $\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

2) Si w = f(x,y,z) es diferenciable, x = x(t), y = y(t), z = z(t) son funciones diferenciables de t, entonces $\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$.

3) Si w = f(x,y,z) es diferenciable, x = g(u,v), y = h(u,v), z = k(u,v) son funciones diferenciables, entonces las derivadas parciales de w con respecto a u y v están dadas por las fórmulas :

   a) $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$.

   b) $\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$

3. Derivada direccional

La derivada de f en P(x,y) en la dirección del vector unitario **u** = u_1i+u_2j es el numero $\left(\frac{df}{ds}\right)_u=\lim_{s\to 0}\frac{f(x+u_1s,y+u_2s)-f(x,y)}{s}$ siempre que el limite exista. Usando la regla de la cadena se puede obtener $\left(\frac{df}{ds}\right)(P_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\frac{dy}{ds}$, donde x = x_0+u_1s, y = y_0+u_2s es la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $P_0(x_0,y_0)$ y tiene la dirección del vector unitario u = u_1i+u_2j. La expresión $\left(\frac{df}{ds}\right)(P_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\frac{dy}{ds}$ se puede escribir $\left(\frac{df}{ds}\right)(P_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0),\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right)\bullet\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\bullet(u_1,u_2)=\nabla f(P_0)\bullet u$.

La derivada de f en la dirección de **u** también se denota $D_u f = \nabla f \bullet u$. Como $D_u f = \nabla f\bullet u$ = $D_u f = \| \nabla f \| \bullet \| u \| \cos\theta$, entonces se tiene que: f crece más rápido en la dirección de ∇f que la derivada en esta dirección es $\| \nabla f \|$; f decrece más rápido en la dirección de $-\nabla f$ y que la derivada en esta dirección es $-\| \nabla f \|$; f tiene un cambio nulo en cualquier dirección **u** ortogonal a ∇f y la derivada en estas direcciones es 0. Si f es una función con tres variables independientes x,y,z entonces la derivada direccional se define de la siguiente forma: $Duf=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bullet\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bullet(u_1,u_2,u_3)=\nabla f(P_0)\bullet u$

La expresión ∇f se llama **gradiente** de f. Para estimar el cambio el valor de una funciòn f cuando nos movemos una distancia ds desde un punto P_0 en una direcciòn particular $\boldsymbol{u}$ se usa $df = (\nabla f \bullet u)ds$.

Rectas y Planos: Si $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ es una curva suave sobre la superficie $z = f(x,y,z) = c$ de una funciòn diferenciable f, entonces $f(x(t),y(t),z(t)) = c$. Al diferenciar resulta $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bullet\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right) = (\nabla f)\bullet\left(\frac{dr}{dt}\right) = 0$; esto indica que ∇f es ortogonal a al vector velocidad dr/dt, por lo tanto ∇f es el vector normal al plano tangente de la superficie y es el vector direcciòn de la recta normal a la superficie. El vector normal para la superficie $z = f(x,y)$ està dado por $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right)$.

Ejercicios Propuestos

1) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $x = \mathrm{Cos}(t)$; $y = \mathrm{Sen}(t)$; $z = \mathrm{Tan}(t)$; Hallar dw / dt.

2) Dada $u = xy + xz + yz$; $x = r$; $y = r\mathrm{Cos}(t)$; $z = r\mathrm{Sen}(t)$. Obtener: $\partial u/\partial r$ y $\partial u/\partial t$.

3) Dada $h = xyz(x + y + z)$; $x = \mathrm{Sen}(uv)$; $y = \mathrm{Cos}(uw)$; $z = \mathrm{Tan}(vw)$; hallar $\partial h/\partial u$, $\partial h/\partial v$ y $\partial h/\partial w$

4) Si f es una función diferenciable, a y b son constantes, demostrar que $z = f((3bx^2 - 2ay^3)/6)$ satisface la ecuación diferencial parcial $ay^2(\partial z/\partial x) + bx(\partial z/\partial y) = 0$.

5) Sea $z = f(at , bt)$, con a y b constantes. Supòngase que se verifican todas las condiciones de diferenciabilidad. Hallar d^2z / dt^2 en funciòn de las derivadas parciales de z.

6) Sea $z = f(x,y)$, con $x = au$, $y = bv$, a y b constantes. Supòngase la existencia y continuidad de las primeras y segundas derivadas. Hallar $\partial^2z/\partial u^2$ $\partial^2z/\partial v^2$ en tèrminos de las derivadas parciales de z respecto a x e y.

7) Si $z = f(uv^2)$, demuestre que $2u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

8) Si $z = f(u-v , v-u)$, demuestre que $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

9) Si $w = f\left(\frac{r-s}{s}\right)$, demuestre $r\frac{\partial w}{\partial r} + s\frac{\partial w}{\partial s} = 0$.

10) Si $z = xy + f(x^2 + y^2)$, demuestre $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$.

11) f es diferenciable de la variable $u = bx - ay$. Demuestre que $z = f(bx - ay)$ satisface la ecuaciòn $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

12) Supòngase que el sistema $\begin{cases} xu + yv - uv = 0 \\ yu - xv + uv = 0 \end{cases}$ define a u y v como funciones de x e y. Use derivaciòn implìcita para hallar ∂u/∂x y ∂v/∂y.

13) f es una funciòn diferenciable de x e y; $u = f(x,y)$; $x = rCos\theta$; $y = rSen\theta$. Demuestre que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}Cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{Sen\theta}{r}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}Sen\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{Cos\theta}{r}$

14) Si $u = f(x-y, y-z, z-x)$., demuestre que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

15) Demuestre que cualquier funciòn de la forma $z = f(u) = f(x + kt)$ satisface la ecuaciòn de onda $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

16) Sea $z = f(x,y)$, donde $x = rCos\theta$, $y = rSen\theta$. Demuestre que se cumple la igualdad $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$.

17) Demuestre que si $w = f(u,v)$ satisface la ecuaciòn de Laplace $f_{uu} + f_{vv} = 0$, y si $u = (x^2 + y^2)/2$ y $v = xy$, entonces w tambièn satisface la ecuaciòn de Laplace $w_{xx} + w_{yy} = 0$ si todas las funciones necesarias son diferenciables.

18) Si $y = f(x)$ y $F(x,y) = 0$ son funciones diferenciables, entonces se cumple que $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}/\frac{\partial F}{\partial y}$. Use este resultado para hallar dy/dx en el punto dado:

a) $x^3 - 2y^2 + xy = 0$; P(1,1)

b) $xy + y^2 - 3x - 3 = 0$; P(-1,1)

c) $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$; P(1,2)

d) $xe^y + Sen(xy) + y - \ln(2) = 0$, (0, ln2)

19) Si la ecuaciòn $F(x,y,z) = 0$ determina z como una funciòn diferenciable de x e y, entonces $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}/\frac{\partial F}{\partial z}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}/\frac{\partial F}{\partial z}$. Use este resultado para hallar el valor de $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial x}$ en el punto dado:

a) $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$; P(1,1,1)

b) $Sen(x + y) + Sen(y + z) + Sen(x + z) = 0$; P(π,π,π)

20) La notaciòn $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_z$ indica que dadas dos funciones, las variables x y z son independientes entre sì. Encuentre la derivada indicada en cada uno de los siguientes casos:

a) $w = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = x^2 + y^2$. Hallar $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$, $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$, $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$.

b) $U = f(P,V,T)$ y $PV = nRT$ (n y R constantes). Hallar $\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_V$ y $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$.

c) Encuentre $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x$ y $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ en el punto (w,x,y,z) = (4,2,1,-1) si $w = x^2y^2 + yz - z^3$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

d) Suponga que $x^2 + y^2 = r^2$; $x = rCos\theta$, $y = rSen\theta$. Encuentre $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta$ y $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y$

21) Suponga que las derivadas parciales de una función f(x,y,z) en puntos sobre la hélice x = Cost, y = Sent, z = t son f_x = Cost, f_y = Sent, $f_z = t^2 + t - 2$. ¿En qué puntos sobre la curva, en caso de que los haya, puede f tomar valores extremos?

22) Sea T = f(x,y) la temperatura en el punto x,y) sobre el círculo x = cost, y = Sent, $0 \le t \le 2\pi$, y suponga que $\frac{\partial T}{\partial x} = 8x - 4y$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 8y - 4x$.

a) Encuentre dónde ocurren las temperaturas máxima y mínima sobre el círculo examinando las derivadas dT/dt y d^2T/dt^2.

b) Sea $T = 4x^2 - 4xy + 4y^2$. Encuentre los valores máximo y mínimo de T sobre el círculo.

23) Un cilindro circular recto varía de tal manera que su radio crece a la tasa 3 cm/min y su altura decrece a la tasa 5 cm/min. ¿A qué tasa varía el volumen cuando su radio es de 10 cm y la altura es de 8 cm?

24) En un instante dado, la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo es de 10 cm y crece a razón de 1 cm/min, y la longitud de su otro cateto es de 12 cm y decrece a razón de 2 cm/min. Calcule la razón de cambio de la medida del ángulo agudo opuesto al cateto de 12 cm de longitud en el instante dado.

25) La altura de un cono circular recto crece a razón de 40 cm/min y el radio disminuye a razón de 15 cm/min. Calcule la razón de cambio del volumen en el instante en que la altura es de 200 cm y el radio de 60 cm.

26) La altura de un cilindro circular recto disminuye a razón de 10 cm/min, y el radio crece a razón de 4 cm/min. Determine la razón de cambio del volumen en el instante en que la altura es de 50 cm y el radio es de 16 cm.

27) En un tanque en forma de cilindro circular recto fluye agua a razón de 0.8□ cm^3/min. El tanque se ensancha de manera que aún cuando conserva su forma cilíndrica, su radio crece a razòn de 0.2 cm/min. ¿Con què rapidez sube la superficie del agua cuando el radio tiene 2 m, y el volumen del agua dentro del cilindro es de 20π m^3?

28) Una pared vertical forma un ángulo de 120º con el suelo. Una escalera de 20 m de longitud està recargada contra la pared y su parte superior resbala a razòn de 3 m/seg. ¿Cuán rápido varìa el área del triángulo formado por la pared, la escalera y el suelo, cuando la escalera forma un ángulo de 30º con el suelo?

29) El voltaje V de un circuito que satisface la ley V = IR disminuye lentamente conforme se descarga la baterìa. Al mismo tiempo, la resistencia R crece al calentarse el resistor. ¿Còmo cambia la corriente en el instante en que R = 600 ohms, I = 0.04 amperios, dR/dt =0.5 ohms/seg y dV/dt = -0.01 volt/seg.?

30) Las longitudes a,b y c de los bordes de una caja rectangular cambian con el tiempo. En el instante en considereaciòn a = 1 m, b = 2 m, c = 3 m, da/dt = db/dt = 1 m/seg y dc/dt = -3 m/seg. ¿Con que razones cambian el volumen V y el àrea de superficie S de la caja en ese instante? ¿La longitud de las diagonales interiores de la caja crecen o decrecen?

31) ¿A què razòn cambia el volumen de una caja rectangular cuando se incrementa su ancho de 3 pies a una razòn de 2 pulg/seg, decrece su longitud de 8 pies a una razòn de 5 pulg/seg, y se incrementa su altura de 4 pies a una razòn de 2 pulg/seg?

32) La temperatura T en un punto en el espacio (x,y,z) se representa por f(x,y,z). Un astronauta viaja de tal modo que sus coordenadas x e y se incrementan a razòn de 4 millas/seg, y su coordenada z disminuye a una razòn de 3 millas/seg. Calcule la razòn dT/dt a la cual cambia la temperatura en un punto donde $\partial T/\partial x = 4º$, $\partial T/\partial y = 7º$ y $\partial T/\partial z = 9º$.

33) Un punto P se mueve a lo largo de la curva de intersecciòn del cilindro $x^2 + y^2 = 5$ y del paraboloide $9x^2 - 16y^2 = 144z$, en donde x, y, z se expresan en cms. Si x aumenta a razòn de 0.2 cm/min, hallar la variaciòn de z en la unidad de tiempo, cuando x = 2.

34) Una partìcula se mueve en un plano de tal forma que su abcisa y su ordenada vienen dadas, en funciòn del tiempo, por $x = 2 + 3t,\ y = 4 + t^2$ en donde x e y se expresan en metros y t se expresa en minutos. Hallar la variaciòn de la distancia al origen en la unidad de tiempo en el instante t = 1 min.

35) Un punto se mueve a lo largo de la curva de intersecciòn de la superficie $x^2 + 3xy + 3y^2 = z^2$ con el plano $x - 2y + 4 = 0$. Cuando x = 2, x aumenta a razòn de 3 unidades/seg. Hallar: La variaciòn de y en la unidad de tiempo y la variaciòn de z en la unidad de tiempo.

36) Suponga que se calienta un cilindro circular recto sòlido, y que su radio aumenta a razòn de 0.2 cm/h y su altura a razòn de 0.5 cm/h. Encuentre la razòn de aumento del àrea con respecto al tiempo, cuando el radio es 10 cm y la altura es 100 cm.

37) La parte de un àrbol que por lo regular se corta en el aserradero es el tronco, un sòlido cuya forma aproximada es la de un cilindro circular recto. Si el radio de cierto árbol crece ½ pulg/año y la altura crece 8 pulg/año, ¿Con què rapidez crece el volumen cuando el radio mide 20 pulgadas y la altura es 400 pulgadas?

38) La temperatura de una placa metàlica en (x,y) es e^{-x-3y} grados. Un insecto camina hacia el noreste en razòn de $\sqrt{8}$ pies/min (es decir: $dx/dt = dy/dt = 2$). Desde el punto de vista del insecto, ¿còmo cambia la temperatura con el tiempo cuando cruza el origen?

39) El bote de juguete de un niño se desliza desde su puño en la margen de un rio rectilìneo. La corriente lo lleva rio abajo a 5 pies/seg. Sopla un viento cruzado que lo aleja hacia la margen opuesta a 4 pies/seg. Si el niño corre a lo largo de la orilla a 3 pies/seg, siguiendo el bote, ¿Con què rapidez se aleja èste de èl cuando t = 3 seg?

40) Està escurriendo arena en una pila cònica, de modo que en cierto momento la altura es 100 pulgadas y crece a razòn de 3 pulg/min; cuando el radio mide 40 pulgadas crece a razòn de 2 pulg/min. ¿Con què rapidez crece el volumen en este momento?

41) Un automòvil A viaja hacia el norte por la carretera X a 90 km/h. Un automòvil B viaja hacia el oeste por la carretera Y a 80 km/h. Cada uno de los automòviles se acerca a la intersecciòn de estos caminos. ¿A què veocidad cambia la distancia entre los vehìculos cuando A està a 0.3 km de la intersecciòn, y B està a 0.4 km de la intersecciòn?

42) La tensiòn elèctrica o voltaje, a lo largo de un conductor aumenta a razòn de 2 V/min y la resistencia disminuye a razòn de 1 ohm/min. Use la fòrmula I = E/R y la regla de la cadena para evaluar la razòn a la que varìa la corriente que pasa por el conductor cuando R = 50 ohms y E = 60 V.

43) Los lados x e y de un triàngulo forman un algulo θ. Las tres medidas aumentan a razones de 0.3 cm/seg, 0.5 cm/seg y 0.1 rad/seg respectivamente. Encuentre la razòn de cambio del àrea del triàngulo en el instante en que x = 10 cm, y = 8 cm y $\theta = \pi/6$.

44) Una partìcula se mueve en el espacio tridimensional, de manera que sus coordenadas en cualquier instante son $x = 4Cos(t)$, $y = 4Sen(t)$, $z = 5t$, $t \geq 0$. Evalùe la razòn de cambio de la distancia de la partìcula al origen, cuando $t = 5\pi/2$.

45) Dos partìculas A y B se mueven en el plano describiendo trayectorias elipticas, dadas por las ecuaciones $x_1 = 4Cos(t)$, $y_1 = 2Sen(t)$ para la partìcula A, y $x_2 = 2Sen(2t)$, $y_2 = 3Cos(2t)$ para la partìcula B. ¿A què ritmo varìa la distancia entre las dos partìculas en $t = \pi$?

46) Encuentre el gradiente de f en el punto dado:

a) $f(x,y) = ln(x^2 + y^2)$; P(1,1)

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + zln(x)$; P(1,1,1)

c) $f(x,y,z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z + Arctan(xz)$; P(1,1,1)

d) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + ln(xyz)$. P(1,1,1)

e) $f(x,y,z) = e^{x+y}Cos(z) + (y + 1)Arcsen(x)$; P(0, 0, π/6)

47) Encuentre la derivada de la funciòn f en P en la direcciòn de A :

a) $f(x,y) = 2xy - 3y^2$, P(5,5) ; A = 4i + 3j

b) $f(x,y) = x - (y^2/x) + \sqrt{3}\, Arcsec(2xy)$; P(1,1) ; A = 12i + 5j

c) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$; P(1,-1,2) ; A = 3i + 6j – 2k

d) $f(x,y,z) = 3e^x Cos(yz)$; P(0,0,0) ; A = 2i + j – 2k

e) $f(x,y) = Arctan(y/x) + \sqrt{3}\, Arcsen(xy/2)$; P(1,1) ; A = 3i – 2j

48) Encuentre la direcciòn en que la funciòn f crece y decrece màs rapidamente en el punto P, y halle la derivada de la funciòn en dicha direcciòn:

a) $f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2$; P(-1,1)

b) $f(x,y) = x^2y + e^{xy}Sen(y)$; P(1,0)

c) $f(x,y,z) = (x/y) - yz$; P(4,1,1)

d) $f(x,y,z) = ln(xy) + ln(yz) + ln(xz)$; P(1,1,1)

e) $f(x,y,z) = ln(x^2 + y^2 - 1) + y + 6z$; P(1,1,0)

49) Encuentre las ecuaciones para el plano tangente y la recta normal sobre la superficie dada en el punto P:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$; P(1,1,1)

b) $2z - x^2 = 0$; P(2,0,2)

c) $Cos(\pi x) - x^2y + e^{xz} + yz = 4$; P(0,1,2)

d) $x + y + z = 1$; P(0,1,0)

e) $x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y - z + 4 = 0$; P(2,-3,18)

50) Graficar $f(x,y) = c$, ∇f y la recta tangente en el punto dado:

a) $x^2 + y^2 = 4$; P(√2,√2)

b) $x^2 - y = 1$; P(√2,1)

c) $xy = -4$; P(2,-2)

d) $x^2 - xy + y^2 = 7$; P(-1,2)

e) $x^2 + 4y^2 = 8$; P(-2,1)

51) Encuentre una ecuaciòn para el plano tangente a la superficie en el punto P:

a) $z = ln(x^2 + y^2)$; P(1,0,0)

b) $z = e^{-x^2-y^2}$; P(0,0,1)

c) $z = \sqrt{y - x}$; P(1,2,1)

d) $z = 4x^2 + y^2$; P(1,1,5)

e) $z = Arctan(xy)$; P(1,1,π/4)

52) Encuentre las ecuaciones paramètricas para la recta tangente a la curva de intersecciòn de las superficies en el punto P:

a) $x + y^2 + 2z = 4$; $x = 1$; P(1,1,1)

b) $xyz = 1$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$; P(1,1,1)

c) $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 = 11$; P(1,1,3)

d) $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 - z = 0$; P(√2,√2,4)

e) $x^2 + y^2 - 2 = 0$, $x + z - 4 = 0$; P(1,1,3)

53) ¿Cuànto cambiarà $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ si el punto P(x,y,z) se mueve desde P(3,4,12) una distancia ds = 0.1 unidades en la direcciòn del vector 3i+6j–2k?

54) ¿Cuànto cambiarà $f(x,y,z) = x + xCos(z) - ySen(z) + y$ si el punto P(x,y,z) se mueve desde P(2,-1,0) una distancia ds = 0.2 unidades hacia el punto Q(0,1,2)?

55) ¿Cuànto cambiarà $f(x,y,z)\ Cos(\pi xy) + xz^2$ si el punto P(x,y,z) se mueve desde P(-1,-1,-1) una distancia ds = 0.1 unidades hacia el origen?

56) ¿En què direcciònes la derivada de $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ en P(1,1) es igual cero?

57) ¿Hay una direcciòn A en la que la razòn de cambio de $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ en P(1,2) sea igual a 14? Justifique su respuesta.

58) ¿Hay una direcciòn A en la cual la razòn de cambio de la funciòn temperatura $T(x,y,z) = 2xy - yz$ (ºC , pies) sea igual a –3 ºC/ft? Justifique su respuesta.

59) La derivada de $f(x,y)$ en P(1,2) en la direcciòn de i + j es $2\sqrt{2}$ y en la direcciòn de –2j es –3. ¿Cuàl es la derivada de f en la direcciòn de -i – 2j?

60) Encuentre la derivada de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ en la direcciòn del vector tangente unitario de la hèlice $r(t) = (Cos(t))i + (Sen(t))j + tk$ en los puntos donde t = -π/4 y π/4.

61) Encuentre la derivada de $f(x,y,z) = xy + 2xz - y^2 + z^2$ en el punto P(1,-2,1) a lo largo de la curva $x = t,\ y = t - 3,\ z = t^2$ en la direcciòn creciente de

62) Demostrar que la ecuaciòn del plano tangente a la superficie $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ es $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1$.

63) Demuestre que las superficies $f(x,y,z) = xy + yz - 4xz = 0$, $g(x,y,z) = 3z^2 - 5x + y = 0$ se cortan ortogonalmente en el punto P(1,2,1).

64) Demuestre que las superficies $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ y $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0$ son tangentes en el punto P(2,1,1).

65) Demuestre que las superficies $F(x,y,z) = 3x^2 + 4y^2 + 8z^2 - 36 = 0$ y $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6 = 0$ se cortan en àngulo recto.