CÁLCULO VECTORIAL
GUIA No 3

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

1. Funciones y Superficies

Definición: Si D es un conjunto de n-uplas de números reales $(x_1,x_2,...,x_n)$, una función de valores reales f sobre es una regla que asigna un número real $w = f(x_1,x_2,...,x_n)$ a cada elemento de D, donde D es el dominio de f y los valores tomados por w es el rango de f, la cual es una función de n variables independientes, de x_1 a x_n.

Definición: El conjunto de puntos donde el plano $z = c$ corta a la superficie $z = f(x,y)$ se llama **línea de contorno** $f(x,y) = c$. El conjunto de puntos del plano XY en que una función $f(x,y)$ tiene un valor constante $f(x,y) = c$ se llama **curva de nivel**, es decir la proyección de la línea de contorno $f(x,y) = c$ sobre el plano XY. El conjunto de todos los puntos $(x,y,f(x,y))$ en el espacio, para $(x,y)\in D_f$, se llama gráfica de f o **superficie** $z = f(x,y)$. El conjunto de puntos (x,y,z) en el espacio, donde una función de tres variables independientes tiene un valor constante $f(x,y,z) = c$, se llama **superficie de nivel**.

Superficies: Las ecuaciones generales de las superficies más comunes son:

1) $ax + by + cz = d$. (Planos)

2) $ax^2 + by^2 = c \,;\, a,b,c > 0$. (Cilindros Elípticos)

3) $z = f(x) \,;\, z = f(y)$; (Placas cilíndricas)

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; (Elipsoides)

5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$; (Paraboloides Elípticos)

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$; (Conos Elípticos)

7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; (Hiperboloides de una hoja)

8) $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$; (Hiperboloides de 2 hojas)

9) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$; (Paraboloides Hiperbólicos)

Operaciones: Si $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son funciones de dos variables independientes y $h(z)$ es una función de una variable independiente, entonces, en las siguientes operaciones tienen como resultado funciones de dos variables independientes:

1) $(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$.
2) $(f-g)(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$.
3) $(fg)(x,y) = f(x,y)\, g(x,y)$.
4) $(f/g)(x,y) = f(x,y) / g(x,y)$.
5) $(h o f)(x,y) = h(f(x,y))$.

2. Límites y Continuidad

Las siguientes definiciones son extensiones de la definición de límite de A. L. Cauchy para funciones de dos y tres variables independientes:

1) $\underset{(x,y)\to(a,b)}{Lím} f(x,y) = L$ si, para todo ε>0, existe un correspondiente δ>0 tal que, para todo (x,y)∈ D_f, $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow \left| f(x,y) - L \right| < \varepsilon.$
2) $\underset{(x,y,z)\to(a,b,c)}{Lím} f(x,y,z) = L$ si, para todo ε>0, existe un correspondiente δ>0 tal que, para todo (x,y,z)∈ D_f, $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta$ implica $\left| f(x,y,z) - L \right| < \varepsilon.$

Si una función $f(x,y)$ tiene límites diferentes a lo largo de dos trayectorias diferentes que pasan por el punto P(a,b), entonces $\underset{(x,y)\to(a,b)}{Lím} f(x,y)$ no existe.

Propiedades: Si $\underset{(x,y)\to(a,b)}{Lím} f(x,y) = L$ y $\underset{(x,y)\to(a,b)}{Lím} g(x,y) = M$, entonces:

1) $Lím\ [\ f(x,y) \pm g(x,y)\ ]\ =\ L \pm M.$
2) $Lím\ [\ f(x,y)\ g(x,y)\ ]\ =\ LM.$
3) $Lím\ [\ k\, f(x,y)\ ]\ =\ k\, Lím\, f(x,y)$.
4) $Lim\ [\ f(x,y) / g(x,y)\ ]\ =\ L/M$ si $M \neq 0.$
5) $Lím\ [\ f(x,y)\ ]^{m/n} = L^{m/n}$, si $L^{m/n} \in R.$

Continuidad: Una función $f(x,y)$ es continua en el punto (a,b) si:

1) f está definida en (a,b).
2) $\underset{(x,y)\to(a,b)}{Lím} f(x,y)$ existe.
3) $\underset{(x,y)\to(a,b)}{Lím} f(x,y) = f(a,b)$

Ejercicios Propuestos

1) Encuentre el dominio de las siguientes funciones (muéstrelo gráficamente):

a) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{|x|+|y|-4}}$

b) $f(x,y)=\sqrt{4y-x^2}$

c) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x-y^2}}$

d) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2-y^2}$

e) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy\sqrt{x-1}}$

f) $f(x,y)=\dfrac{x}{(x-y)\sqrt{x^2-4}}$

g) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy^2-x^2y}$

h) $f(x,y)=\ln(x+y)$

i) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2-y^2+x+3y-2}$

j) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{2x^2-xy-y^2}$

k) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy\sqrt{4x^2+9y^2-36}}$

l) $f(x,y)=\dfrac{4xy}{\sqrt{4-x^2-4y^2}}$

m) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{9x^2-4y^2-36}}$

n) $f(x,y)=xySen(x^2+y^2)$

o) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{9x^2y^2-x^2y^4+9x^4y^2}}$

p) $f(x,y,z)=z\ln(xy)$

q) $f(x,y,z)=xySen(z)+\ln(z-y)$

r) $f(x,y)=\sqrt{1-x+y}$

s) $f(x,y,z)=\ln(16-4x^2-4y^2-z^2)$

t) $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

u) $f(x,y)=ArcSen(x+y)$

v) $f(x,y)=ArcCos\left(\dfrac{y}{x}\right)$

w) $f(x,y)=|x|+|y|$

x) $f(x,y)=\dfrac{x}{xy\sqrt{x^2+y^2-1}}$

y) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{Sen(y)}{x}}$

z) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{Cos(x)}{y}}$

2) Grafique varias líneas de contorno para:

a) $f(x,y)=|x|+|y|$

b) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}$

3) Grafique varias curvas de nivel para:

a) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-4y^2}$

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

4) Grafique varias superficies de nivel para:

a) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

b) $f(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}$

5) Grafique en el sistema coordenado XYZ:

a) $2x + 3y - 4z = 12$

b) $z - 3y = 6$

c) $f(x,y) = | 3Sen(y) |$

d) $f(x,y) = ln(x+1)$

e) $f(x,y) = | x |$

f) $| z | = | y | + 1$

g) $f(x,y) = | x^2 - 1 |$

h) $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$

i) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z + 10 = 0$

j) $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 4z = 32$

k) $z^2 = 9x^2 + 25y^2$

l) $z = 4x^2 + 9y^2$

m) $4x^2 + 9y^2 - 16y^2 = 36$

n) $z^2 - 4x^2 - 9y^2 = 36$

o) $z = x^2 - 9y^2$

p) $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$

6) ¿Cuál es el máximo valor que toma la función $f(x,y,z) = xyz$ sobre la recta $x = 20 - t,\ y = t,\ z = 20$.

7) ¿Cuál es el mínimo valor que toma la función $f(x,y,z) = xy - z$ sobre la recta $x = t - 1,\ y = t - 2,\ z = t + 7$.

8) Bosqueje la parte del plano $x = y - 2$ que se encuentra dentro del cilindro $(y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

9) R es la región limitada por los cilindros $x^2 + z^2 = 4$ y $z^2 + y^2 = 4$. Bosqueje la región sólida del primer octante.

10) Muestre que cualquier traza del hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en un plano paralelo al plano XZ es una hipérbola.

11) ¿Qué clase de curva es la intersección de $z = x^2 + y^2$ y $z = x^2 + (y-1)^2$?

12) Bosqueje la intersección de $z^2 = x^2 + y^2$ con $z = 1 - x$.

13) Encuentre la ecuación de la esfera que tiene un diámetro con extremos P(-2,3,3) y Q(4,1,5).

14) Encuentre centro y radio de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z = 0$.

15) Determine los valores de k para los cuales la intersección del plano $x + ky = 1$ con el hiperboloide de dos hojas $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ es:
a) Una elipse
b) Una hipérbola

16) Encuentre el volumen del sólido limitado por:

a) El paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$, $(c>0)$, y el plano $z = h$.

b) El cono elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ y los planos $z = h$, $z = 2h$.

c) El hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ y los planos $z + h = 0$, $z = 2h$.

17) Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

b) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \frac{e^y Sen(x)}{x}$

c) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(1,1)}{Lím} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$

d) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(1,1)}{Lím} \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1}$

e) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(2,-4)}{Lím} \frac{y + 4}{x^2 y - xy + 4x^2 - 4x}$

f) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(2,2)}{Lím} \frac{x + y - 4}{\sqrt{x + y} - 2}$

g) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \frac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

h) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(4,3)}{Lím} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y + 1}}{x - y - 1}$

i) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

j) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \frac{Tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

k) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \frac{Sen(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

l) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

m) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

n) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} (1 + xy)^{\frac{1}{xy}}$

o) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$

p) $\displaystyle \underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \frac{a^{xy} - b^{xy}}{xySec(xy)}$

q) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} ArcTan\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

r) $\underset{(x,y)\to(0,1)}{Lím} \dfrac{ArcSen(x/y)}{1+xy}$

s) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{ArcTan(xy)}{xy}$

t) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{4-4Cos\left(\sqrt{|xy|}\right)}{|xy|}$

u) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} ySen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

v) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} xCos\left(\dfrac{1}{y}\right)$

w) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} ArcTan\left(\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$

x) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$

y) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \ln\left(\dfrac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}\right)$

z) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

18) Muestre que los siguientes límites no existen:

a) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{x^4}{x^4+y^2}$

c) $\underset{(x,y)\to(1,1)}{Lím} \dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

d) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{xy}{|xy|}$

e) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{x-y}{x+y}$

f) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{x+y}{x-y}$

g) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{x^2+y}{y}$

h) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{x^2}{x^2-y}$

i) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{x-y^2}{x^2+y^2}$

j) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

k) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$

l) $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lím} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

m) $\underset{(x,y)\to(2,1)}{Lím} \dfrac{y^2-1}{xy-2}$

n) $\underset{(x,y)\to(1,1)}{Lím} \dfrac{x^2-y^2}{xy-1}$

o) $\underset{(x,y)\to(1,3)}{Lím} \dfrac{x^2-1}{3x-y}$

p) $\underset{(x,y)\to(1,2)}{Lím} \dfrac{x^2-1}{xy^2-4}$

19) Evalúe los límites $\underset{h\to0}{Lím} \dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ y $\underset{k\to0}{Lím} \dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^2y^2$

b) $f(x,y) = x^2y^3 - 10x$

c) $f(x,y) = x^3 + y^2$

d) $f(x,y) = Sen(xy)$

e) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$

f) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

20) Determine si son o no continuas las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{Sen(x+y)}{x+y}, & (x+y) \neq 0 \\ 1, & (x+y) = 0 \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} ySen\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + |y|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

21) Determinar el tipo de discontinuidad que tienen las siguientes funciones en el punto (0,0), y redefínalas si es posible:

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^3 - 4xy^2}{x^2 + y^2}$

c) $f(x,y) = (x+y)Sen\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^6 + y^4}$

e) $f(x,y) = xy\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$

f) $f(x,y) = ArcTan\left(\dfrac{|x| + |y|}{x^2 + y^2}\right)$

22) Halle la constante B de tal manera que la siguiente función sea continua en el origen:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3 - 3y^3}{x^2 - y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ B, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

23) Encuentre una fórmula para g(x), de tal manera que la siguiente función sea continua en todo el plano:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4y^2}{x-2y} & , \quad x\neq 2y\\ g(x) & , \quad x=2y\end{cases}$$

24) Determine si hay un valor para k que haga que la siguiente función sea continua en todas partes, si no, explique por qué:

$$f(x,y)=\begin{cases}k+y & , \quad x\leq 3\\ 5-y & , \quad x>3\end{cases}$$

25) Determine si hay un valor para k que haga que la siguiente función sea continua en todas partes, si no, explique por qué:

$$f(x,y)=\begin{cases}k+y & , \quad x\leq 3\\ 5-x & , \quad x>3\end{cases}$$