# CÁLCULO VECTORIAL

GUIA No 2

## FUNCIONES VECTORIALES

### 1. Límites y Continuidad

**Introducción:** Si una partícula viaja por el espacio, la trayectoria de su movimiento se puede describir mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas en función del tiempo: $x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$. La ***posición*** de la partícula se representa mediante la ecuación vectorial $F(t) = f(t)\ i + g(t)\ j + h(t)\ k$, que es un vector que va desde el punto (0,0,0) hasta la posición ( $x(t),\ y(t),\ z(t)$ ) de la partícula en el tiempo $t$.
El conjunto de puntos { ( $f(t), g(t), h(t)$ ) : $t \in \mathbf{D_F}$ } conforman una curva en $\mathbf{R}^3$ que se llamará ***trayectoria*** de la partícula.

**Definición:** Dadas las funciones escalares $x = f(t),\ y = g(t)$ y $z = h(t)$, con dominios $D_f,\ D_g$ y $D_h$ respectivamente, definimos como función vectorial a la ecuación $F(t) = f(t)\ i + g(t)\ j + h(t)\ k$, con dominio $\mathbf{D_F} = \{\ t \in R : t \in D_f \cap D_g \cap D_h\ \}$.
La función vectorial también se puede definir como una regla que asigna a cada elemento $t \in \mathbf{D_F}$ un vector $\langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ de $\mathbf{R}^3$.

**Operaciones:** Si **F** y **G** son funciones vectoriales y $f$ es una función escalar, entonces:
a) ( **F** + **G** ) y ( **F** - **G** ) son funciones vectoriales.
b) $f$ **G** y ( **F** x **G** ) son funciones vectoriales.
c) ( **F·G** ) es una función escalar.

**Límites:** Si $F(t) = f(t)\ i + g(t)\ j + h(t)\ k$ es una función vectorial tal que $\underset{t\to a}{Lím}\, f(t) = A,\ \underset{t\to a}{Lím}\, g(t) = B\ \ y\ \ \underset{t\to a}{Lím}\, h(t) = C$ (existen), entonces se tiene que $\underset{t\to a}{Lím}\, F(t) = Ai + Bj + Ck$. Se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\underset{t\to a}{Lím}\left[F(t) \pm G(t)\right] = \underset{t\to a}{Lím}\ F(t) \pm \underset{t\to a}{Lím}\ G(t).$

b) $\underset{t\to a}{Lím}\left[h(t)F(t)\right] = \underset{t\to a}{Lím}\ h(t)\,\underset{t\to a}{Lím}\ F(t).$

c) $\underset{t\to a}{Lím}\left[F(t) \bullet G(t)\right] = \underset{t\to a}{Lím}\ F(t) \bullet \underset{t\to a}{Lím}\ G(t).$

d) $\underset{t\to a}{Lím}\left[F(t) \times G(t)\right] = \underset{t\to a}{Lím}\ F(t) \times \underset{t\to a}{Lím}\ G(t).$

**Continuidad:** Una función vectorial $\boldsymbol{F(t) = f(t)\, i + g(t)\, j + h(t)\, k}$ es continua en $\boldsymbol{t=a}$ si $\boldsymbol{a}$ está en el dominio de $\boldsymbol{F}$, y $\lim_{t \to a} F(t) = F(a)$. La continuidad de $\boldsymbol{F}$ equivale a la continuidad de todas sus componentes.

## Ejercicios Propuestos

1) Graficar las siguientes funciones vectoriales:

a) $F(t) = 3t^2\, \boldsymbol{i} + 4t^3\, \boldsymbol{j}$

b) $F(t) = 2t\, \boldsymbol{i} + t^2\, \boldsymbol{j}$

c) $F(t) = t^2\, \boldsymbol{i} + t\, \boldsymbol{j}$

d) $F(t) = (t^2-2)\, \boldsymbol{i} + (t/3)\, \boldsymbol{j}$

e) $F(t) = 2Sen(t)\, \boldsymbol{i} + 2Cos(t)\, \boldsymbol{j}$

f) $F(t) = 2Sen(t)\, \boldsymbol{i} + 3Cos(t)\, \boldsymbol{j}$

g) $F(t) = (3-t)\, \boldsymbol{i} + (2t)\, \boldsymbol{j} + (3t-4)\, \boldsymbol{k}$

h) $F(t) = (2Sen(t))\, \boldsymbol{i} - (2Cos(t))\, \boldsymbol{j} + (3t)\, \boldsymbol{k}$

i) $F(t) = (3Sen(t))\, \boldsymbol{i} + (5Cos(t))\, \boldsymbol{j} + (2t)\, \boldsymbol{k}$

j) $F(t) = (1-t)\, \boldsymbol{i} + (t^2)\, \boldsymbol{j} + (\, t\, )\, \boldsymbol{k}$

k) $F(t) = (\, t\, )\, \boldsymbol{i} + (t^2+1)\, j + (\, t^2\, )\, k$

2) Hallar una función vectorial F, cuya gráfica sea la curva de intersección de $y=x^2$ y $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

3) Demuestre que $R(t) = (2Sen(t))\, \boldsymbol{i} + (2Sen(t))\, \boldsymbol{j} + (\sqrt{8}\, Cos(t))\, \boldsymbol{k}$ está contenida en una esfera centrada en el origen.

4) Encuentre una función vectorial F, cuya gráfica sea la curva :

a) $y = x^2,\ z = 2$

b) $x = y^2,\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

5) Considere las funciones vectoriales $F(t) = (2t^2)\boldsymbol{i} - (5t^3)\, \boldsymbol{j} + (2t^2-t)\, \boldsymbol{k}$ ; $G(t) = (Sen(t))\, \boldsymbol{i} + (2Cos(t))\, \boldsymbol{j} + (e^{2t})\, \boldsymbol{k}$ ; $H(t) = (1-t)\, \boldsymbol{i} + \frac{1}{t}\, \boldsymbol{j}$. Encuentre:

a) $F(t) \cdot G(t)$

b) $G(t) \times H(t)$

c) $2e^{2t}$ F(t) + ($t^2$+t) G(t) + 10 H(t)

d) G(t)·[ H(t) x F(t) ]

6) Encuentre el dominio de las siguientes funciones vectoriales:

a) F(t) = (Sen(t)) ***i*** + (Cos(t)) ***j*** + (Tan(t)) ***k***

b) h(t)F(t); donde $h(t) = Sen(t)$ y F(t) = $\dfrac{1}{Cos(t)} i + \dfrac{1}{Sen(t)} j + \dfrac{1}{Tan(t)} k$.

c) F(t) - G(t); donde F(t) = (ln(t)) ***i*** + 3t ***j*** - $t^2$ ***k***, G(t) = ***i*** + (5t) ***j*** - ($t^2$) ***k***.

d) F(t) = $\ln(t) i + Tan(2t - \pi) j - (2t^2 - 4t) k$.

e) F(t) = $\sqrt{25 - t^2}\, i + \sqrt{t^2 - 4}\, j - \dfrac{4t}{t^2 - 9} k$.

f) F(t) = $3Sec(4t - \pi) i + \ln(2t - 5) j + \sqrt{t - 5}\, k$.

7) Calcular los siguientes límites:

a) $\underset{t \to 1}{Lím} \left( \dfrac{1 - \sqrt{t}}{1 - \sqrt[3]{t}} i + \dfrac{1 - e^{1-t}}{t - 1} j + \dfrac{t^5 - 1}{t^6 - 1} k \right)$

b) $\underset{t \to 1}{Lím} \left( \dfrac{t^3 - 1}{t - 1} i + \dfrac{t^2 - 3t + 2}{t^2 + t - 2} j + (t^2 + 1) e^{t-1} k \right)$

c) $\underset{t \to 0}{Lím} \left( \dfrac{Sent}{t} i + \dfrac{1 - Cost}{t} j + e^{t-1} k \right)$

d) $\underset{t \to 1}{Lím} \left( \dfrac{1 - t^2}{Sen\pi t} i + \dfrac{Cos(\pi t / 2)}{1 - \sqrt{t}} j + \dfrac{1 - Sent}{1 - t} k \right)$

e) $\underset{t \to \pi}{Lím} \left( \dfrac{Sent}{t - \pi} i + \dfrac{Tant}{t - \pi} j + \dfrac{1 - Tan(t/4)}{t - \pi} k \right)$

f) $\underset{t \to \pi/2}{Lím} \left( \dfrac{\pi - 2t}{Cost} i + \dfrac{1 - Sent}{\pi - 2t} j + \dfrac{Cost}{t + \frac{\pi}{2}} k \right)$

g) $\underset{t \to 0}{Lím} \left( \dfrac{1 - \sqrt{Cost}}{t^2} i + \dfrac{Cos2t - Cos4t}{t^2} j + \dfrac{Tant - Sent}{t^3} k \right)$

h) $\underset{t \to a}{Lím} \left( \dfrac{Sent - Sena}{t - a} i + \dfrac{Cost - Cosa}{t - a} j + \dfrac{Tant - Tana}{t - a} k \right)$

i) $\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{a+t}-\sqrt[3]{a-t}}{t}\,i+\frac{2\sqrt{t^2+t+1}-t-2}{t^2}\,j+\frac{\sqrt{a+t}-\sqrt{a-t}}{t}\,k\right)$

j) $\lim_{t\to 1}\left(\frac{\sqrt{t-1}+\sqrt{t}-1}{\sqrt{t^2-1}}\,i+\frac{\sqrt{t+8}-\sqrt{8t+1}}{\sqrt{5-t}-\sqrt{7t-3}}\,j+\frac{1-\sqrt[3]{t}}{1-\sqrt[5]{t}}\,k\right)$

k) $\lim_{t\to\infty}\left(\left[t\sqrt{t^2+9}-t^2\right]i+\left[\sqrt{t^2+1}-\sqrt{t^2-1}\right]j+\left[\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right]k\right)$

l) $\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{t}\right)^t i+\left(1-\frac{2}{t}\right)^{3t} j+\left(1+\frac{1}{4t}\right)^{2t} k\right)$

m) $\lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln(1+3t)}{t}\,i+\frac{e^t-e^{-t}}{Sent}\,j+\frac{a^t-1}{t}\,k\right)$

n) $\lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln(a+t)-\ln a}{t}\,i+\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}\,j+\frac{Cosmt-Cosnt}{t^2}\,k\right)$

o) $\lim_{t\to 2}\left(\frac{2^t-t^2}{t-2}\,i+\frac{\ln t-\ln 2}{t-2}\,j+\frac{\sqrt{t-2}+\sqrt{t}-\sqrt{2}}{\sqrt{t^2-4}}\,k\right)$

8) Encuentre los valores de t para los cuales las funciones dadas son continuas:

a) F(t) = Cos$t$ $\boldsymbol{i}$ + Sen$t$ $\boldsymbol{j}$ + $[t]\boldsymbol{k}$

b) F(t) = $\frac{i+2j}{t(t+1)}$

c) F(t) = $e^t( t\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{t}\,j + 3\boldsymbol{k})$

d) F(t) = $\sqrt{4-t^2}\; i+t^2 j+\sqrt{t}\; k$.

e) F(t) = ln(1-3$t$) $\boldsymbol{i}$ + $\frac{1}{t}\,j+\sqrt{1-t^2}\; k$.

f) F(t) = $\frac{1}{t^2-9}\,i+\sqrt{t^2-4}\,j+e^t k$.

g) F(t) = $ArcCos(t)\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} + \sqrt{t}\; k$

h) F(t) = ln(2$t$-5) $\boldsymbol{i}$ + ln($t$-4) $\boldsymbol{j}$ + $\sqrt{8-t}\; k$.

i) F(t) = Sec(2$t$- $\frac{\pi}{4}$)$\boldsymbol{i}$ + $\sqrt{25-t^2}\; j+2t\,k$.

j) F(t) = 2Tan(3$t$- $\frac{\pi}{4}$) $\boldsymbol{i}$ + 3 $\sqrt{t}\,j+\sqrt{t^2-4\pi^2}\; k$.

**Definición:** Si F(t) es una función vectorial, entonces la derivada de F(t) es otra función vectorial definida por $F'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t}$, si el límite existe.

$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t}$ es un vector con la dirección del vector secante $P_0Q = F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)$; cuando $\Delta t \to 0$. $P_0Q$ tiende al vector tangente en $P_0$.

Algebraicamente, F´(t) es la división de un vector por un escalar; geométricamente, F´(t) es aproximado a un segmento rectilíneo dirigido, tangente a la curva en el punto P. Si ***F(t) = f(t) i + g(t) j + h(t) k,*** entonces ***F´(t) = f´(t) i + g´(t) j + h´(t) k.***

Si ***F(t) = f(t) i + g(t) j + h(t) k*** es derivable en $t = t_0$ y $F'(t_0) \neq 0$, entonces, el vector tangente a la gráfica de ***F*** en $t = t_0$ es $F'(t_0)$. Si $F'(t) \neq 0$ y F´(t) es continua en $t=t_0$ y la tangente varía continuamente en un entorno de $t_0$, se dice que F es lisa o suave en $P_0$.

Si las coordenadas de la posición de la partícula ***F(t) = f(t) i + g(t) j + h(t) k***, son 2-diferenciables, entonces ***F(t)*** será 2-diferenciable. Así podemos hallar los vectores velocidad ***v*** y aceleración ***a*** de la partícula en un tiempo ***t*** cualquiera.

Si F(t) es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio, entonces el vector ***velocidad*** de la partícula, tangente a la curva, es $\vec{v}(t) = \frac{dF}{dt}$ en cualquier punto t. La ***rapidez*** de la partícula es la magnitud del vector velocidad. La ***dirección*** del vector velocidad es la dirección del movimiento en el tiempo y se define como ***v***/ll***v***ll. La derivada del vector velocidad (si existe), es el vector ***aceleración*** de la partícula.

**Propiedades:** Si ***F*** y ***G*** son funciones vectoriales, ***h*** función escalar (todas derivables en t), ***a, b*** constantes, entonces:

*a) ( aF(t) + bG(t) )´ = aF´(t) + bG´(t).*
*b) ( h(t) F(t) )´ = h(t) F´(t) + h´(t) F(t).*
*c) ( F(t)•G(t) )´ = F´(t)•G(t) + F(t)•G´(t). (Producto Punto)*
*d) ( F(t)xG(t) )´ = F´(t)xG(t) + F(t)xG´(t). (Producto Cruz)*
*e) ( F( h(t) ) )´ = h´(t) F´( h(t) )*

**Ortogonalidad:** Si ***F(t)*** es una función vectorial no nula, derivable y con norma constante, entonces ***F(t)*** es ***ortogonal*** a ***F´(t).*** Esto significa que la curva está sobre una superficie esférica.

## Ejercicios Propuestos

1) Encuentre la derivada de las siguientes funciones vectoriales:

a) $F(t) = \ln\sqrt{a+t^4}\; i + 2^{tan(t^2)}\; j - t^3 3^t\, k$

b) $F(t) = Arctan(\sqrt{t})\, i + Arc\,\mathrm{sen}(\sqrt{t})\, j - Sec^3(3t)k$

c) $F(t) = \dfrac{Sent}{t+1} i + \dfrac{e^t}{e^{-t}+e^t} j - \dfrac{1}{t^2+2t} k$

d) $F(t) = e^{Sen(2t)}\, i + te^t\, j - Cos(\ln t)k$

e) $F(t) = \dfrac{a^{2t}}{2} i + \dfrac{b^{3t}}{3} j - \dfrac{c^{4t}}{4} k$

f) $f(x) = \left(xi + (x+1)\,j\right) \bullet \left((2x)i - (3x^2)\,j\right)$

g) $f(x) = \left\| (Senx)i - (2x)\,j + (Cosx)k \right\|$

2) F(t)es la posición de una partícula en el plano XY en el tiempo t. Encuentre la ecuación en x e y cuya gráfica sea la trayectoria de la partícula. Encuentre los vectores velocidad y aceleración en el tiempo t dado:

a) $F(t) = (t+1)\,i + (t^2-1)\,j$ ; t = 1.

b) $F(t) = (t^2+1)\,i + (2t-1)\,j$ ; T = 1/2.

c) $F(t) = (e^t)\,i + (\frac{2}{9}e^{2t})\,j$ ; t = ln3.

d) $F(t) = (Cos2t)\,i + (3Sen2t)\,j$; t=0.

e) $F(t) = (Sent)\,i + (Cost)\,j$ ; t = π/4.

3) F(t) es la posición de una partícula en el espacio en el tiempo t. Encuentre la ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva F en el punto dado. Encuentre la velocidad, la rapidez, la aceleración de la partícula y dirección en el tiempo t dado.

a) F(t) = $e^{2t}$ ***i*** + ($t^2$-t) ***j*** + (lnt) ***k*** ; t=3.

b) F(t) = $F(t) = (1+t)\,i + \dfrac{t^2}{\sqrt{2}} j - \dfrac{t^3}{3} k$ ; t=1.

c) $F(t) = (2Cost)\,i + (Sent)\,j - (4t)k$ ; t=π/2.

d) $F(t) = (Sect)i + (Tant)j - \left(\frac{4}{3}t\right)k$ ; t=π/6.

e) $F(t) = (2\ln(t+1))\,i + t^2\,j - \dfrac{t^2}{2}k$ ; t=1.

f) $F(t) = (e^{-t})\,i + (2Cos3t)\,j - (2Sen3t)k$ ; t=0.

4) F(t) es el vector posición de una partícula en el espacio en el tiempo t. Encuentre los tiempos en el intervalo de tiempo dado, en que los vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

a) $F(t) = (t - Sent)\,i + (1 - Cost)\,j$ ; $0 \le t \le 2\pi$.

b) $F(t) = (Sent)\,i + (Cost)\,j$ ; $t \ge 0$.

5) Determinar los intervalos donde F(t) es una curva suave.

a) F(t) = ( 5Cost - Cos5t ) ***i*** + ( 5Sent - Sen5t ) ***j***

b) F(t) = $t^2$ ***i*** + $t^3$ ***j***

c) F(t) = 2Cos$^3$t ***i*** + 3Sen$^3$t ***j***

d) F(t) = ( t - 2Sent ) ***i*** + ( 1 - 2Cost ) ***j***

e) F(t) = ***i*** /( t - 1 ) + (3t) ***j***

f) F(t) = $\dfrac{3t}{1+t^3}\,i + \dfrac{3t^2}{1+t^3}\,j$

6) En el tiempo t=0, una partícula se localiza en el punto (1,2,3). Viaja en línea recta al punto (4,1,4), tiene rapidez 2 en (1,2,3) y aceleración constante ***3i - j + k***. Encuentre una ecuación para el vector posición F(t) de la partícula en el tiempo t.

7) Una partícula se mueve a lo largo de la parte superior de la parábola $y^2 = 2x$ de izquierda a derecha con rapidez constante de 5 unidades por segundo. Encuentre la velocidad de la partícula al pasar por el punto (2,2).

8) Una partícula se mueve alrededor de la elipse $\left(\dfrac{y}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{2}\right)^2 = 1$ en el plano YZ de manera que su posición en el tiempo t es F(t) = (3Cost)**j** + (2Sent)**k**. Encuentre los valores máximo y mínimo de ll***v***ll y ll***a***ll.

## 3. Integrales

**Definición:** La integral indefinida de F respecto a t es el conjunto de todas las antiderivadas de F y se denota por $\int F(t)dt.$ Si *R(t)* es cualquier antiderivada de F, entonces $\int F(t)dt = R(t) + C.$

Si las componentes de F(t) = f(t) i + g(t) j + h(t) k son integrables sobre [a,b], entonces lo es también F y la integral definida de F entre a y b esta dada por :

$$\int_a^b F(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)i + \left(\int_a^b g(t)dt\right)j + \left(\int_a^b h(t)dt\right)k$$

**Propiedades:** Si ***F*** y ***G*** son funciones vectoriales integrables en [a,b], C es un vector constante y K es un escalar cualquiera, entonces:

a) $\int_a^b kF(t)dt = \mathrm{k}\int_a^b F(t)dt$ .

b) $\int_a^b \left(F(t) \pm G(t)\right)dt = \int_a^b F(t)dt \pm \int_a^b G(t)dt$ .

c) $\int_a^b C \bullet F(t)dt = \mathrm{C} \bullet \int_a^b F(t)dt$ .

d) $\int_a^b C \times F(t)dt = \mathrm{C} \times \int_a^b F(t)dt$ .

## Ejercicios Propuestos

1) Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \left[\left(\sqrt{1-t}\right)i + \left(t\sqrt{1+t}\right)j + \left(\dfrac{1}{t^5+t}\right)k\right]dt$

b) $\int \left[\left(t^2 e^{2t}\right)i + \left(tSen(4t)\right)j + \left(e^t Cost\right)k\right]dt$

c) $\int \left[\left(Arctant\right)i + \left(Arc\,\mathrm{sen}\,t\right)j + \left(xArctan2t\right)k\right]dt$

d) $\int \left[\left(\ln(t)\right)i + \left(t\ln(t)\right)j + \left(\ln^2(t)\right)k\right]dt$

e) $\int \left[\left(\sqrt{4-t^2}\right)i + \left(\sqrt{4+t^2}\right)j + \left(\sqrt{t^2-4}\right)k\right]dt$

f) $\int\left[\left(\frac{1}{t^2+4}\right)i+\left(\frac{1}{t^2-4}\right)j+\left(\frac{1}{t^2+t-2}\right)k\right]dt$

g) $\int\left[\left(Sen^2t\right)i+\left(Sec^3t\right)j+\left(Cos4tCos8t\right)k\right]dt$

h) $\int\left[\left(\frac{1}{1+tant}\right)i+\left(\frac{1}{Sent+Cost}\right)j+\left(\sqrt{1+Cos4t}\right)k\right]dt$

i) $\int\left[\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)i+\left(\frac{1}{1+\sqrt{t}}\right)j+\left(\frac{1}{e^t+e^{-t}}\right)k\right]dt$

j) $\int\left[\left(e^{\sqrt{t}}\right)i+\left(\frac{t^2+1}{t^4+1}\right)j+\left(\frac{1}{t\ln(\ln t)}\right)k\right]dt$

2) Resuelva los problemas de valor inicial para F como función vectorial de t.

a) Ecuación diferencial : $\frac{dF}{dt}=-ti-tj-tk$ .

Condición inicial : $F(0) = i + 2j + 3k$

b) Ecuación diferencial : $\frac{dF}{dt}=(180t)i+(180t-16t^2)j$ .

Condición inicial : $F(0) = 100j$

c) Ecuación diferencial : $\frac{dF}{dt}=\frac{3}{2}\sqrt{1+t}\,i+e^{-t}j+\frac{1}{1+t}k$ .

Condición inicial : $F(0) = k$

d) Ecuación diferencial : $\frac{dF}{dt}=(t^3+4t)i+(t)j+2t^2k$ .

Condición inicial : $F(0) = i + j$

e) Ecuación diferencial : $\frac{d^2F}{dt^2}=-32k$ .

Condición inicial : $F(0) = 100k$ y $F'(0) = 8i + 8j$

a) Ecuación diferencial : $\frac{dF}{dt}=-i-j-k$ .

Condición inicial : $F(0) = 10i + 10j + 10k$ y $F'(0) = 0i + 0j + 0k$

3) La aceleración de una partícula en función del tiempo t ≥0 viene dada por la expresión $a = \frac{dv}{dt} = (12Cos2t)i - (8Sen2t)j + (16t)k$. Sabiendo que la velocidad $\boldsymbol{v}$ y el desplazamiento ***F*** son nulos en t=0, hallar $\boldsymbol{v}$ y ***F*** en función del tiempo.

4) La aceleración de una partícula en función del tiempo t ≥0 viene dada por la expresión $a = \frac{dv}{dt} = (e^{-t})i - (6t+6)j + (3Sent)k$. Sabiendo que la velocidad $\boldsymbol{v}$ y el desplazamiento ***F*** son nulos en el instante inicial t=0, hallar $\boldsymbol{v}$ y ***F*** en función del tiempo.

5) La aceleración de un objeto en función del tiempo t viene dada por $\boldsymbol{a} = -\, g\, \boldsymbol{j}$, siendo $\boldsymbol{g}$ una constante. Sabiendo que en el instante inicial t=0, la velocidad es $\boldsymbol{v} = v_0 Cos\theta_0\, i + v_0 Sen\theta_0\, j$ y que el desplazamiento es $\boldsymbol{F} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$, hallar $\boldsymbol{v}$ y ***F*** en función del tiempo t>0. Este caso corresponde al movimiento de un proyectil lanzado por una pieza de artillería con un ángulo de elevación $\theta_0$ y una velocidad inicial de módulo $\boldsymbol{v}_0$.

6) Una partícula parte del reposo en el punto P=(3,0) y se mueve con aceleración $\boldsymbol{a}(t) = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, donde $\|\boldsymbol{a}(t)\|$ se mide en m/sg$^2$. Hallar la posición de la partícula tras t=3 segundos.

7) Se lanza un proyectil de masa m desde una posición inicial $F_0$ con una velocidad inicial $v_0$. Hallar su vector de posición en función del tiempo.

Nota: Fuerza debida a la gravedad es F = -mg j.

Segunda ley del movimiento es F = ma.

## 4. Vectores Tangente y Normal

**Vector tangente unitario:** Si F(t) es una función vectorial cuya gráfica es lisa, entonces la derivada F´(t) es un vector tangente a la gráfica en el punto correspondiente a F(t). Como la gráfica es lisa, F´(t) $\neq$ 0 y entonces se puede construir el vector tangente unitario principal T(t) asociado a F´(t). El vector tangente unitario se define como $T(t) = \dfrac{F´(t)}{\|F´(t)\|}$ .

**Vector normal unitario:** Existen infinitos vectores normales a una curva en un punto P, son todos los vectores ortogonales a T(t), los cuales forman un plano; sin embargo se puede construir un vector normal unitario principal. Como ll T(t) ll = 1, entonces T(t) es ortogonal a T´(t), luego el vector normal unitario principal se puede definir como $N(t) = \dfrac{T´(t)}{\|T´(t)\|}$ .

**Vector binormal unitario:** Es el vector B definido por el producto cruz TxN, el cual es perpendicular al plano formado por T y N. Los vectores T, N y B forma un sistema coordenado llamado triedro móvil.

**Planos:** Si F(t) una curva lisa en P($x_0$,$y_0$,$z_0$) con vectores unitarios tangente **T**, Normal **N** y binormal **B** en P($x_0$,$y_0$,$z_0$), entonces: El **plano osculador** es el que pasa por P y su vector normal es B; este plano contiene a los vectores T y N. El **plano normal** es el que pasa por P y su vector normal es T; este plano contiene a los vectores B y N. El **plano rectificante** es el que pasa por P y su vector normal es N; este plano contiene a los vectores T y B.

**Longitud de arco:** Si F(t) es una función vectorial cuya gráfica es una curva lisa en el intervalo [a,b], la función longitud de arco en [a,b] se define de la siguiente forma: $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|F´(u)\| du = \int_{t_0}^{t} \|v(u)\| du$ , $a \le t \le b$. De aquí resulta $s´(t)$ = ll $v(t)$ ll, que indica que la razón de cambio con que se desplaza una partícula a lo largo de su trayectoria no tiene relación con distancia en que se encuentre el punto base para $t_0$. Además, por ser s(t) creciente, es inversible con derivada dt/ds = 1 / llvll. Por lo tanto se puede decir que F(t) es derivable respecto a s y $\dfrac{dF}{ds} = \dfrac{dF}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{v(t)}{\|v(t)\|} = \dfrac{F´(t)}{\|F´(t)\|} = T(t)$ y $N(t) = \dfrac{dT}{ds} / \left\|\dfrac{dT}{ds}\right\|$ .

Si $F(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ es una curva lisa en [a,b], entonces la longitud del arco de curva en el intervalo [a,b] viene dada por la expresión siguiente:

$$s(t) = \int_a^b \|F´(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x´(t))^2 + (y´t))^2 + (z´(t))^2}\ dt \ .$$

## Ejercicios Propuestos

1) Halle los vectores unitarios tangente **T**, normal principal **N** y Binormal **B** en cada punto de la gráfica de la función vectorial dada:

a) F(t) = (2Cost)i + (2Sent)j + √5t k ; t = π/4

b) F(t) = ti + $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$k ; t = 1

c) F(t) = ( Cos3t )i + (Sen3t )k ; t = π/3

d) F(t) = ( tCost )i + ( tSent )j + $\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}$k ; t = π/2

e) F(t) = ( $e^t$ )i + ($e^{-t}$ )j + (√2t )k ; t = 1

f) F(t) = ( lnSent )i + ( lnCost )j ; t = π/3

2) Halle la longitud del arco de la curva en el intervalo indicado:

a) F(t) = (12t)i + (5Cost)j + (3-5Sent)k ; 0 ≤ t ≤ 2.

b) F(t) = (2Cost)i + (2Sent)j + √5t k ; 0 ≤ t ≤ π.

c) F(t) = ti + $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$k ; 0 ≤ t ≤ 8.

d) F(t) = ( Cos3t )i + (Sen3t )k ; 0 ≤ t ≤ π/2.

e) F(t) = ( tCost )i + ( tSent )j + $\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}$k ; 0 ≤ t ≤ π.

3) Use la integral $s(t) = \int_0^t \|v(u)\| du$ para encontrar el parámetro de longitud de arco a lo largo de la curva desde el punto en que t=0, y luego encuentre la longitud de la porción indicada:

a) F(t) = (4Cost)i + (4Sent)j + (3t)k ; 0 ≤ t ≤ π/2.

b) F(t) = ($e^t$Cost)i + ($e^t$Sent)j + ($e^t$)k ; -ln4 ≤ t ≤ 0.

c) Encuentre la longitud de la curva F(t) = (√2 t)i + (√2 t)j + (1-$t^2$)k de (0,0,1) a (√2,√2,0).

4) Pruebe que la curva $F(t) = (Cost)i + (Sent)j + (1\text{-}Cost)k$, $0 \le t \le \pi$, es una elipse mostrando que es la intersección de un cilindro circular recto y un plano. Encuentre ecuaciones para el cilindro y el plano.

5) Para la curva anterior, trace la elipse sobre el cilindro y agregue a su croquis los vectores tangentes unitarios en $t=0$, $\pi/2$, $\pi$ y $3\pi/2$.

6) Calcule la longitud de la elipse $F(t) = (Cost)i + (Sent)j + (1\text{-}Cost)k$, $0 \le t \le \pi$ .

7) Calcule la distancia dirigida, desde t=0 hasta cualquier t, a lo largo de la *recta* $F(t) = (x_0 + at)i + (y_0 + bt)j + z_0 + ct)k$, donde $u = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ es unitario.

8) Las siguientes funciones son parametrizaciones diferentes de una vuelta de la hélice. Verifique que la longitud es independiente de la parametrización graficando y calculando la longitud de la hélice:

a) $F(t) = (Cos4t)i + (Sen4t)j + (4t)k$ ; $0 \le t \le \pi/2$.

b) $F(t) = (\,Cos(t/2)\,)i + (\,Sen(t/2)\,)j + (\,t/2\,)k$ ; $0 \le t \le 4\pi$.

c) $F(t) = (Cost)i - (Sent)j - tk$ ; $-2\pi \le t \le 0$.

9) Encuentre la ecuación de los planos : osculador, normal y rectificante, de cada una de las siguientes curvas en el punto dado:

a) $F(t) = (2Cost)i + (2Sent)j + \sqrt{5}t\,k$ ; $t = \pi/4$

b) $F(t) = ti + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}k$ ; $t = 1$

c) $F(t) = (\,Cos3t\,)i + (Sen3t\,)k$ ; $t = \pi/3$

d) $F(t) = (\,tCost\,)i + (\,tSent\,)j + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}k$ ; $t = \pi/2$

e) $F(t) = (\,e^{t}\,)i + (e^{-t}\,)j + (\sqrt{2t}\,)k$ ; $t = 1$

f) $F(t) = (\,lnSent\,)i + (\,lnCost\,)j$ ; $t = \pi/3$

10) Encuentre el punto sobre la curva $r(t) = (5Sent)i + (5Cost)j + (12t)k$ a una distancia de $26\pi$ unidades a lo largo de la curva desde el origen $r(0)$ en la dirección de la longitud de arco creciente.

## 5. Componentes de la aceleración

**Curvatura y torsión:** El vector tangente unitario de una curva diferenciable F está dado por $T = \frac{dF/dt}{\|dF/dt\|} = \frac{v(t)}{\|v(t)\|} = \frac{dF}{ds}$ y el vector unitario normal principal está dado por $N = \frac{dT/dt}{\|dT/dt\|} = \frac{dT/ds}{\|dT/ds\|} = \frac{1}{k}\frac{dT}{ds}$. La expresión $k = \|dT/ds\|$ se llama función de **curvatura** de la curva F. Se puede probar que $k = \|v\text{x}a\| / \|v\|^3$.
La curvatura k es la medida del giro del plano normal al moverse el punto P a lo largo de la curva, es decir, informa que tanto gira a la derecha o a la izquierda la trayectoria de la partícula.
En el plano, el círculo de curvatura o circulo osculador en un punto P sobre una curva plana donde k≠0, es el círculo de radio ρ = 1/k que se encuentra hacia el lado cóncavo de la curva, tangente a la curva en el punto P, y que tiene la misma curvatura que tiene la curva en P.
La función de **torsión** de una curva suave es $\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N$, donde B es el vector binormal B = TxN. La torsión τ es la medida de la curva para girar fuera del plano osculador y se puede calcular con $\tau = \frac{1}{\|v\text{x}a\|^2}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$, siempre que $\|v\text{x}a\| \neq 0$.

**Aceleración:** Si la trayectoria de una partícula es un curva lisa (con T≠0), entonces sus vectores velocidad $v$ y aceleración $a$, satisfacen las ecuaciones $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)T$ y $a = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) \cdot T + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 N = a_T T + a_N N$, donde $a_T = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\|v\|$ indica que tanto de la aceleración ocurre en la dirección tangente al movimiento, y $a_N = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k\|v\|^2$ indica que tanto de la aceleración ocurre en dirección normal al movimiento. Las componentes escalares de la aceleración satisfacen que $\|a\|^2 = a_N{}^2 + a_T{}^2$.

## Ejercicios Propuestos

1) Dado que T, N y B son los vectores unitarios tangente, normal principal y binormal de una curva F en un punto P, justifique o refute las siguientes afirmaciones:

a) $\left(\dfrac{dT}{ds}\right) \text{x} N = 0$

b) $\dfrac{dB}{ds} = T \text{x} \left(\dfrac{dN}{ds}\right)$

c) $\dfrac{dB}{ds} \bullet \dfrac{dN}{ds} = 0$

d) $\dfrac{dB}{ds} \bullet B = 0$

e) $\dfrac{dB}{ds}$ es ortogonal al plano rectificante.

f) $\dfrac{dB}{ds}$ es paralelo a N.

g) $\dfrac{dB}{ds} + \tau N = 0$

h) $\dfrac{dB}{ds} + \tau N = 0$ entonces $\tau = -\dfrac{dB}{ds} \bullet N$

2) Dado que T y N son los vectores unitarios tangente y normal principal de una curva F en un punto P, justifique o refute las siguientes afirmaciones:

a) $T = \dfrac{dF}{ds}$

b) $v = T\dfrac{ds}{dt}$

c) $a = \dfrac{dT}{dt}\dfrac{ds}{dt} + T\dfrac{d^2s}{dt^2}$

d) $\dfrac{dT}{ds} = kN$

e) $a = \dfrac{dT}{ds}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 + T\dfrac{d^2s}{dt^2}$

f) Si $a = \dfrac{dT}{ds}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 + T\dfrac{d^2s}{dt^2}$, entonces $a = kN\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 + T\dfrac{d^2s}{dt^2}$.

g) $k\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$ y $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ son escalares.

3) Dado que T, N y B son los vectores unitarios tangente, normal principal y binormal de una curva F en un punto P, justifique o refute las siguientes afirmaciones:

a) $v\text{X}a = \left(T\frac{ds}{dt}\right)\text{X}\left(kN\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + T\frac{d^2s}{dt^2}\right)$.

b) $v\text{X}a = \left(k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 T\text{X}N\right)$

c) $v\text{X}a = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 B$.

d) $k = \|v\text{X}a\| \big/ \|v\|^3$.

4) Demuestre que $(a_N)2 + (a_T)^2 = |\, a\, |^2$.

5) Demuestre que la curvatura de F(t) = ($x_0$+at)i + ($y_0$+bt)j + ($z_0$+ct)k es cero.

6) Demuestre que la curvatura de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ es $1/a$.

7) Encuentre la ecuación cartesiana del círculo osculador para las siguientes curvas planas en el punto dado:

a) r(t) = ti + (lnCost)j , t = $\pi/4$.

b) r(t) = (lnSect)i + tj ; t = 0.

c) r(t) = (2t-3)i + (5-t2)j ; t = 2.

d) R(t) = (Cost + tSent)i + (Sent - tCost)j ; t = 0.

e) R(t) = ( ln($t^2$+1) )i + ( t - 2Arctant )j ; t = 0.

8) Sea r(x)=xi + f(x)j la parametrización de una curva plana dos veces diferenciable de x. Demuestre que $k(x) = \dfrac{|f''(x)|}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}}$.

9) Sea r(t)=f(t)i + g(t)j una curva plana suave, definida por dos funciones $x=f(t)$ y $y=g(t)$, dos veces diferenciables. Demuestre que $k = \dfrac{|xy'' - y'x''|}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{3/2}}$.

10) Use las formulas anteriores para hallar la curvatura de las siguientes curvas planas en el punto dado:

a) y = 4x - 2 cuando x = 2.

b) y = x - (1/9)$x^2$ cuando x=3.

c) $y = ax^2 + bx$ cuando $x=c$.

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$ cuando $x=1$.

e) $y = \text{Sen}x$ cuando $x=\pi/2$.

f) $y = \ln(x)$ cuando $x=1$.

11) Halle los puntos de máxima curvatura de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

12) Halle el radio de curvatura en cada extremo relativo de la curva $y = x^6 - 3x^2$.

13) Encuentre las funciones k y $\tau$ para las siguientes curvas espaciales:

a) r(t) = (Cost + Sent)i + (Sent - tCost)j + 3k.

b) r(t) = ( $e^t$ Cost )i + ( $e^t$ Sent )j + 2k.

c) r(t) = ( $\text{Cos}^3$t )i ( $\text{Sen}^3$t )j.

d) r(t) = ( Cosht )i + ( Senht )j + tk.

e) r(t) = (aCost )i + ( aSent )j + (bt)k.

14) Escriba a de la forma $a = a_T T + a_N N$, sin hallar T y N, para cada una de las siguientes curvas, en el valor de t dado:

a) r(t) = (Cost + Sent)i + (Sent - tCost)j + 3k ; $t=\pi/4$

b) r(t) = ( $e^t$ Cost )i + ( $e^t$ Sent )j + $\sqrt{2}e^t$k ; t=0.

c) r(t) = ( $\text{Cos}^3$t )i ( $\text{Sen}^3$t )j ; $t=\pi/3$.

d) r(t) = ( 3Cosh2t )i + ( Senh2t )j + 6tk ; t=ln2.

e) r(t) = (aCost )i + ( aSent )j + (bt)k ; $t=\pi/6$.

15) Demuestre que la parabola $y = ax^2$ tiene su curvatura máxima en su vértice.

16) Encuentre la función de curvatura de la hélice r(t) = (aCost )i + ( aSent )j + (bt)k, (a,b>0) . ¿Cuál es el máximo valor que puede tener k para un valor fijo de b?

17) Refute o confirme las siguientes afirmaciones:

a) Si un automóvil se desplaza por una gran carretera curva en el instante en que el velocímetro indica 35 mpt constante, entonces no se está acelerando.

b) La aceleración de una partícula siempre es ortogonal a su velocidad, entonces su rapidez es constante.

c) La magnitud de la fuerza requerida para mover un objeto con rapidez constante a lo largo de una trayectoria curva es, de acuerdo a las leyes de Newton, un múltiplo constante de la curvatura de las trayectorias.

18) Demuestre que la torsión de una curva plana ( r(t) = f(t)i + g(t)j ) varias veces diferenciable es cero.

19) Encuentre la función de torsión de la hélice r(t) = (aCost )i + ( aSent )j + (bt)k, (a,b>0) . ¿Cuál es el máximo valor que puede tener $\tau$ para un valor fijo de a?

20) Sea r(t) la posición de una partícula móvil. Demuestre que las componentes tangencial y normal del vector aceleración se pueden escribir de la siguiente forma: $a_T = \dfrac{r´(t) \cdot r´´(t)}{\|r´(t)\|}$ y $a_N = \dfrac{\|r´(t) \text{x} r´´(t)\|}{\|r´(t)\|}$ .