CÁLCULO VECTORIAL
GUIA No 1

REPASO DE ALGEBRA VECTORIAL

1. Espacios Euclídeos

Vectores en R^2: Un vector **v** en el plano R^2 = XY es un par ordenado de números reales (a,b). Los números reales a y b se llaman componentes del vector **v**. El vector cero es (0,0). El vector **v** se puede escribir como AB, donde A es el punto inicial y B es el punto final. Si **v** = AB y, $A=(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, entonces **v** = B-A = (x_2-x_1,y_2-y_1) = (x_3,y_3). La norma o magnitud del vector **v** es $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.
Vectores en R^3: Un vector en el espacio R^3 = XYZ es una terna ordenada de números reales (a,b,c). Si **v** = AB, con $A=(x_1,y_1,z_1)$ y $B=(x_2,y_2,z_2)$, entonces la norma del vector **v** es $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$.

Vectores unitarios: Un vector v de R^n es unitario si su norma es igual a la unidad, es decir: ll v ll = 1.

DIRECCION DE UN VECTOR: En R^2, la dirección del vector v = (a,b) se define como el ángulo θ que forma el vector con la parte positiva del eje X, donde Tanθ = b/a.

En R^3, la dirección de un vector **u** = (x_0,y_0,z_0) se dá en términos de los ángulos directores α, β y χ así: Cosα = x_0 / ll**u**ll ; Cosβ = y_0 / ll**u**ll ; Cosχ = z_0 / ll**u**ll, cada ángulo está limitado por el vector **u** y la parte positiva de cada eje coordenado.

ADICION DE VECTORES: Sean **u** = $(x_1,x_2,x_3, \dots, x_n)$ y **v** = $(y_1,y_2,y_3, \dots, y_n)$ vectores de R^n, entonces **u+v** := $(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

PRODUCTO POR ESCALAR: Si **u** = $(x_1,x_2,x_3, \dots, x_n)$ es un vector de R^n y $k \in R$, entonces k**u** = $k(x_1,x_2,x_3, \dots, x_n) = (kx_1,kx_2,kx_3, \dots, kx_n)$

PRODUCTO PUNTO: Sean **u** = $(x_1,x_2,x_3, \dots, x_n)$ y **v** = $(y_1,y_2,y_3, \dots, y_n)$ vectores de R^n, el producto punto se define como **u•v** := $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \dots + x_ny_n$.

PRODUCTO CRUZ: Sean **u** = (x_1,x_2,x_3) y **v** = (y_1,y_2,y_3) vectores de R^3, el producto cruz o vectorial se define como **u**x**v** = Det [(i, j, k), (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)]. El vector resultante **u**x**v** es perpendicular a los vectores **u** y **v**.

ANGULO ENTRE VECTORES: Sean u y v dos vectores distintos de cero. Si □ es el ángulo entre ellos, entonces Cosθ = **u•v** / ll**u**ll ll**v**ll.

VECTORES PARALELOS: Sean u y v vectores distintos de cero, u es paralelo a v si existe u real k tal que **u** = k**v** o **v** = k**u**.

VECTORES PERPENDICULES: Sean **u** y **v** dos vectores distintos de cero, **u** y **v** son perpendiculares si **u•v** = 0.

PROYECCION: Sean **u** y **v** vectores distintos de cero. La proyección de **u** sobre **v** es un vector denotado $\mathbf{proy_v u}$, que se define por $\mathbf{proy_v u} = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})\mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|^2$.

Ejercicios Propuestos

1) Considere los siguientes puntos de R^2 : A=(1,2); B=(1,4); C=(3,7); D=(-2,5); O=(0,0). Obtener :
   (a) Gráfica de los vectores AB y AO en un mismo plano.
   (b) Norma los vectores BC y CD.

2) Considere los puntos de R^2: O=(0,0); P=(4,8); Q=(1,7); R=(5,5); S=(-3,9). Obtener gráficamente:
   (a) OP + OR
   (b) PQ + PR

3) Considere los puntos de R^2: O=(0,0); P=(4,8); Q=(1,7); R=(5,5); S=(-3,9). Obtener analíticamente:
   (a) OP + 3PQ
   (b) 2PR - 3RS

4) Considere los siguientes puntos de R^2 : A=(1,2); B=(1,4); C=(3,7); D=(-2,5); O=(0,0). Escribir los siguientes vectores como una combinación lineal de los vectores **i** = (1,0) y **j** = (0,1) :
   (a) 3AB - 2BC
   (b) BC + CD

5) Considere los siguientes puntos de R^3 : A=(1,2,3); B=(3,0,-4); C=(0,6,0); D=(7,5,1).
   (a) Hallar la norma de los vectores AD y CA.
   (b) Hallar el ángulo entre los vectores AC y BD.

6) Considere los siguientes vectores de R^3 : A=(3,6,8); B=(3,-4,-6); C=(8,0,-3) y D=(1,1,1). Resolver los siguientes problemas :
   (a) Realizar los siguientes productos: A•(BxC) ; B•(AxC) ; (AxBxC) ; (A•B)(C•D)
   (b) Calcular las normas: $\|$ AxBxC $\|$; $\|$ AxCxB $\|$; $\|$ $proy_A B$ $\|$; $\|$ $proy_C D$ $\|$.

8) Sea **u** = 3i + 4j y **v** = i + aj. Encuentre el valor de "**a**" para que :
   (a) u y v sean ortogonales.
   (b) u y v sean paralelos.
   (c) El ángulo entre u y v sea $\pi/4$.

2. Aplicaciones en el espacio

ECUACION DE LA RECTA EN R^3: La recta L que pasa por el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y que tiene la dirección del vector D(a,b,c) se define como L = { PX I PX = tD, $t\in R$ }.
La ecuación vectorial de la recta es de la forma : X - P = tD.
Las ecuaciones paramétricas de la recta son : $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$, $t\in R$.
Las ecuaciones simétricas de la recta son : $(x - x_0)/a = (y - y_0)/b = (z - z_0)/c$.

ECUACION DEL PLANO EN R^3: El plano □ que pasa por el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y tiene vector normal N(a,b,c) se define como □ = { PX I PX•N = 0 }. La ecuación general del plano es de la forma $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Para obtener la ecuación del plano del que contiene a los puntos P, Q y R, obtenemos el vector normal haciendo N = PQxPR.

AREA DE UN PARALELOGRAMO: Si A, B y C son puntos de R^3 y son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, entonces el área del paralelogramo es IIABxBCII.
Si $U = (u_1,u_2)$ y $V = (v_1,v_2)$ son vectores de R^2, entonces el área del paralelogramo que generan es II $(u_1,u_2,0)$ x $(v_1,v_2,0)$ II.

VECTORES COPLANARIOS: Tres vectores U, V y W de R^3 son coplanarios si U•(VxW) = 0.

VOLUMEN DE UN PARALELEPIPEDO: Si U•(VxW) $\neq$ 0 entonces II U.(VxW) II es el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores U, V y W.

Ejercicios Propuestos

1) Encuentre la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos :
   (a) P(2,1,8) y Q(4,0,7)
   (b) P(1,1,1) y Q(9,9,9)

2) Encuentre las ecuaciones paramétricas y simétrica de la recta que satisface las siguientes condiciones:
   (a) Que pasa por P(1,-2,4) y es paralela al vector -3i -5j.
   (b) Que pasa por P(4,2,-6) y es paralela a la recta (x-2)/4 = (y+8)/5 = (z-8)/2.
3) Demuestre que :
   (a) Las rectas (x-3)/2 = (y+1)/4 = (2-z)/1 y (x-3)/5 = (-y-1)/2 = (z-3)/2 son ortogonales.
   (b) Las rectas L_1:= x = 1+t, y = -3+2t, z = -2-t y L_2:= x = 13+3u, y = 4+u, z = -8-s se intersecan en el punto P(2,-1,-3).

4) Encuentre la ecuación de una recta L, ortogonal a las dos rectas dadas y que pase por el punto dado :
   (a) L_1:= (x+2)/3 = (y-3)/5 = z/6 y L_2:= (2-x)/2 = (3-x)/7 = (z-8)/8 ; P(1,-3,4).
   (b) L_1:= (x-2)/3 = (y+3)/2 = (z-4)/1 y L_2:= (2-x)/2 = (x-1)/3 = (z-2)/8 ; P(2,3,-4).

5) Encuentre la ecuación del plano que cumple las siguientes condiciones :
   (a) Que pase por P(4,9,8) y tiene vector normal N(2,3,2).
   (b) Que pase por P(3,5,-3) y es paralelo al vector D(6,-4,2).

6) Encuentre la ecuación del plano que pasa por los siguientes puntos :
   (a) P(2,3,4), Q(7,-9,0) y R(4,8,0).
   (b) P(4,9,0), Q(7,6,-3) y R(0,-2,0).

7) Encuentre la ecuación del plano que satisface las siguientes condiciones :
   (a) Que contiene al punto P(3,3,3) y contiene al vector D(-3,5,-7).
   (b) Que corta a los ejes X, Y, Z en 3, 6 y 9 respectivamente.

8) Encuentre la intersección entre los siguientes planos :
   (a) 2x + 3y - z = 8 ; 4x - y - z = 10 ; 3x + y + 2z = 0.
   (b) x + y + z = 12 ; 3x - y - 4z = 8.

9) Encuentre el ángulo entre cada par de planos :
   (a) 3x + y + 5z = 8 y 2x + y + z = 4.
   (b) 2x + 2y + 2z = 0 y x + 3y - 5z = 6.

10) Determine si los vectores dados son coplanarios. Si lo son, encuentre la ecuación del plano que los contiene :
   (a) U = 2i - 3j + 4k ; V = 7i - 2j + 3k ; W = 9i - 5j + 7k.
   (b) U = -3i + j + 8k ; V = -2i - 3j + 5k ; W = 2i + 14j - 4k.

11) Encuentre la ecuación del plano que contiene a la recta L y al punto P dados:
   (a) L:= (X-2)/3 = (y+3)/4 = (z-7)/3 ; P(7,7,7)
   (b) L:= (3-x)/1 = (2-y)/2 = (1-z)/3 ; P(0,0,0)

12) Encuentre :
   (a) Tres puntos del plano 3x + 4y - 2z = 12.
   (b) La distancia entre el plano 2x - 3y + 5z = 8 y el punto P(1,1,10).

13) El plano P_1 pasa por los puntos A(2,3,4), B(3,5,7) y C(7,5,3) y el plano P_2 pasa por los puntos P(2,0,4), Q(7,5,1) y R(5,7,0). Determinar si estos planos son intersecantes o nó, en caso que lo sean, encuentre la recta en que se intersecan.

14) Encuentre la distancia entre el plano $\square_k$ y el punto P(x,y,z) dado, o la distancia entre las rectas L_1 y L_2 según sea el caso:
   (a) L_1:= x= 1+t, y=2+3t, z=3-2t ($t \in R$); L_2:= x=4+3u, y=2+4u, z=-3+u ($u \in R$).
   (b) L_1:= (x-2)/3=(y+3)/1=(z-2)/4 ; L_2:= x/3 = y/2 = z/1.

15) En el siguiente gráfico: La ecuación del plano P_1 es $x + 2y + 3z = 12$ y la ecuación del plano P_2 es $2x - 3y + 4z = 12$. Los planos P_1, P_2 y P_3 se intersecan en las rectas L_1, L_2 y L_3, las cuales son paralelas entre sí. Hallar la ecuación del plano P_3. (Ver gráfico 1)

16) ¿Qué valores deben tomar m y n, para que los siguientes planos tengan un punto en común: $x + y + (m-3)z - 8 = 0$, $x - y - z - 4 = 0$, $2x + 3y + z = 2n-1$?

17) ¿Qué valores deben tomar m y n, para que los siguientes planos tengan infinitos puntos en común: $x + 2y + (m-2)z - 8 = 0$, $x - y - (m+2)z - 4 = 0$, $2x + 3y + z = 3n-2$?

18) Encuentre el área del paralelepípedo con vértices consecutivos en : P(1,3,-2), Q(2,1,4) y R(-3,1,6).
(a) P(1,-2,3), Q(2,0,1) y R(0,4,0).
(b) P(a,b,0), Q(a,0,b) y R(0,a,b).

19) Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores :
(a) U = 2i - j + k, V = 3i + 2j - 2k, W = 3i + 2j.
(b) U = i - j, V = 3i + 2k, W = -7j + 3k.

20) Determinar si los siguientes vectores son coplanarios :
(a) U = 2i - 3j + 4k, V = 7i - 2j + 3k, W = 9i - 5j + 7k.
(b) U = -3i + j + 8k, V = -2i - 3j + 5k, W = 2i + 14j - 4k.

3. Espacios y Subespacios

ESPACIO VECTORIAL REAL: Un espacio vectorial real V es un conjunto de objetos llamados vectores, junto con dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por un escalar que satisface los siguientes axiomas :

a) Si $\mathbf{a} \in V$ y $\mathbf{b} \in V$, entonces $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in V$.
b) Para todo $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ en V, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.
c) Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$.
d) Si $\mathbf{a} \in V$, existe un vector $(-\mathbf{a})$ en V tal que $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
e) Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están en V, entonces $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.
f) Si $\mathbf{a} \in V$, y k es un escalar, entonces $k\mathbf{a} \in V$.
g) Si $\mathbf{a},\mathbf{b} \in V$ y si k es un escalar, entonces $k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$.
h) Si $\mathbf{a} \in V$ y, k y n son escalares, entonces $(k+n)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + n\mathbf{a}$.
i) Si $\mathbf{a} \in V$ y si k y n son escalares, entonces $k(n\mathbf{a}) = kn\mathbf{a}$.
j) Para todo $\mathbf{a} \in V$, $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

SUBESPACIO VECTORIAL: Sea V un espacio vectorial y H un subconjunto de V, decimos que H es un subespacio vectorial de V si cumple las dos reglas de cerradura, es decir:

a) Si $\mathbf{a} \in H$ y $\mathbf{b} \in H$, entonces $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in H$.
b) Si $\mathbf{a} \in H$, entonces $k\mathbf{a} \in H$ para todo escalar k.

Ejercicios Propuestos

Para cada uno de los siguientes conjuntos, determinar si son o no espacios vectoriales:

1) $V = \{ (x,y) \in R^2 : y = 5x + 1, x \in R \}$

2) $V = \{ (x,y) \in R^2 : y = mx$, m es un real fijo, $x \in R \}$

3) $V = \{ (x,y,z) \in R^3 : ax + by + cz = 0$, a,b,c son reales fijos $\}$

4) $V = \{ P_n(x)$: P es un polinomio de grado $\leq n \}$

5) $V = \{ P_n(x)$: P es un polinomio de grado $n \leq 3 \}$

6) $V = \{ f(x)$: f(x) es una función continua en $[0,1] \}$

7) $V = \{ M_{nn}$: M es una matriz de tamaño nxn $\}$

8) $V = \{ A_{nn}$: A es una matriz invertible $\}$

9) $V = \{ (x,y) \in R^2 : y \geq 0 \}$

10) $V = \{ M_{nn} : M$ es una matriz diagonal $\}$

11) $V = \{ X : X$ es un vector que en el primer cuadrante $\}$

12) $V = \{ (x,y,z) \in R^3 : x = y = z \in R \}$

13) $V = \{ M_{nn} : M$ es una matriz simétrica $\}$

14) $V = \{ f(x) : f(x)$ es una función diferenciable en $[0,1] \}$

15) $V = \{ M_{2x2} : M$ es una matriz de 2x2 con $a_{11} = a_{22} = 1$, a_{12} y $a_{21} \in R \}$

16) $V = \{ f(x) : f(x)$ es continua en $[0,1]$ con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1 \}$

Para cada uno de los siguientes casos, determine si el subconjunto H dado, del espacio vectorial V, es un subespacio vectorial de V:

17) $V = \{ f(x) : f(x)$ es una función continua en $[0,1] \}$; $H = \{ f(x) \in C[0,1] : \quad f(x)dx=0\}$

18) $V = R^2$; $H = \{ (x,y) \in R^2 : x = y \}$

19) $V = R^2$; $H = \{ (x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$

20) $V = R^3$; H = el plano XY.

21) $V = \{ M_{2x2} : M$ es una matriz de tamaño 2x2 $\}$; $H = \{ M \in M_{2x2} : a_{12} + a_{21} = 0 \}$

22) $V = \{ M_{2x2} : M$ es una matriz de tamaño 2x2 $\}$; $H = \{ M \in M_{2x2} : a_{12} = 1 + a_{11}$; $a_{12} = a_{21} = 0 \}$

23) $V = \{ P_4(x) : P$ es un polinomio de grado $n \leq 4 \}$; $H = \{ P \in P_4 : P(0) = 0 \}$

24) $V = \{ P_n(x) : P$ es un polinomio de grado $\leq n \}$; $H = \{ P \in P_n : P(0) = 1 \}$

25) $V = \{ P_n(x) : P$ es un polinomio de grado $n \leq 5 \}$; $H = \{ P \in P_n : 2 \leq n \leq 4 \}$

4. Generación de Espacios

INDEPENDENCIA LINEAL: Sean $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ un conjunto de n vectores, entonces decimos que los vectores son **linealmente dependientes** si existen n escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos ceros, tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \ldots + c_nv_n = \mathbf{0}$. (**0** es el vector nulo). Si los vectores no son linealmente dependientes se dice que son linealmente independientes; es decir: $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ son **linealmente independientes** si y sólo si $c_1=c_2=c_3=\ldots=c_n=0$.

COMBINACION LINEAL: Sean $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ un conjunto de n vectores, entonces toda expresión de la forma $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n$ en donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son escalares, se llama **combinación lineal** de $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$.

GENERACIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL: Los vectores $v_1, v_2, \ldots v_n$ en un espacio vectorial V se dice que generan V, si todo vector en V puede expresarse como combinación lineal de ellos.

ESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES: Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n vectores en un espacio vectorial V. El espacio generado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es el conjunto de las combinaciones lineales de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Esto es: $\text{gen}\{v_1,v_2,\ldots,v_n\} = \{ v : v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n \}$, donde ai son escalares.

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL: Un conjunto de vectores $B = \{ v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \}$ forman una base para el espacio vectorial V si :

(a) El conjunto $B = \{ v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \}$ es linealmente independiente.

(b) Cualquier $v \in V$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de B.

DIMENSION DE ESPACIO VECTORIAL: La dimensión de un espacio vectorial V de dimensión finita, denotada por **dim(V)**, se define como el número de vectores que hay en una base de V. La dimensión del espacio vectorial **0** es cero.

Ejercicios Propuestos

1) Considere los vectores de R^3: A=(1,2,3); B=(2,-3,-4); C=(3,0,-2); D=(1,0,-5) y E=(0,1,1).
   (a) Expresar el vector (3,7,3) como combinación lineal de los vectores A, B y C.
   (b) Expresar el vector (1,1,1) como combinación lineal de los vectores C, D y E.

2) Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes :
   (a) { (2, 3, 2) , (1, 0, 1) , (3, 1, 1) }
   (b) { (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0) }

3) ¿Para qué valores de "a" son linealmente dependientes los vectores :
   (a) (1,2,3), (2,-1,4) y (3,a,4) ? (b) $(1,-a,1), (2,a^2,-3)$ y $(-2,3a^3,0)$

4) Sean f y g funciones continuas en [0,1], el Wronskiano de f y g se define como $W(f,g) = \text{Det} [(f(x), g(x)) , (f'(x) , g'(x))]$. Si existe $x \in [0,1]$ para el cual $W(f,g) \neq 0$, entonces f y g son linealmente independientes.

   Determinar si los siguientes conjuntos de funciones son linealmente dependientes o linealmente independientes :
   (a) En C[0,1] : Sen2x , Cos2x
   (b) En C[0,1] : e^x , e^{2x}, e^{3x}.

5) Exprese el polinomio $P(x) = 1 + 2x + x^2$ como una combinación lineal de los polinomios $P_1(x) = 3 + x$, $P_2(x) = 4x + 6x^2$ y $P_3(x) = 4 - 2x^2$, si es posible.

6) Determinar si el conjunto de vectores dado es una base del espacio vectorial correspondiente:

   (a) En R^2 : { (1,2) , (3,4) }

   (b) En R^3 : { (1,1,1), (0,1,1), (0,0,1) }

   (c) En R^3 : { (1,-1,2), (1,1,2), (0,0,1) }

   (d) En P_2 : { $1 - x$, $3 - x^2$, x }

   (e) En P_4 : { 1, x, x^2, x^3, x^4 }

   (f) En M_{2x2} : $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \right\}$

   (g) En H = { $(x,y) \in R^2$: $x + y = 0$ } : (1,-1)

7) Hallar una base para el espacio solución del sistema { $x + 2y - z = 0$; $2x - y + 3z = 0$ }

8) Sea V = { $P_n(x)$: $n \leq 3$ } y A = { $1 + x$, $x - x^2$, $x^2 + x^3$, $x - x^3$ }. Determinar si A es un conjunto de vectores linealmente independiente; en caso de serlo, exprese el vector $3x^3-2x^2+x-1$ como una combinación lineal de los elementos de A. ¿Es A una base para V?

9) ¿Para qué valores reales de x constituyen una base de R^3 los vectores (1+x,1,x), (x, 1, 0) y (1, 0, x) ?

10) Hallar una base para el espacio solución **S** del sistema de ecuaciones lineales siguiente : { $2x - y + 3z = 0$; $4x - 2y + 6z = 0$; $-6x + 3y - 9z = 0$ }

11) Hallar una base en R^3 para el conjunto de vectores en el plano □ definido como π : = { (x,y,z) : $3x - 2y + 6z = 0$ }

12) Sea V el conjunto generado por $v_1 = Cos^2(x)$, $v_2 = Sen^2(x)$, $v_3 = Cos(2x)$.

(a) Demostrar que $S = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ no es una base para V.
(b) Encuentre una base para V.

13) Determinar una base y la dimensión del espacio solución del sistema homogeneo:

$$\begin{aligned}
2x + 2y - z \qquad\quad + v &= 0 \\
-x - y + 2z - 3u + v &= 0 \\
x + y - 2z \qquad\quad - v &= 0 \\
z + u + v &= 0
\end{aligned}$$

14) Determinar bases para los siguientes subespacios de R^3:

(a) El plano $3x - 2y + 5z = 0$
(b) El plano $x - y = 0$
(c) La recta $x = 2t$, $y = -t$, $z = 4t$.
(d) Todos los vectores de la forma (a,b,c), donde $b = a+c$.

15) Demostrar que el conjunto de todos los polinomios en P_n que tienen una tangente horizontal en $x=0$ es un subespacio de P_n. Encontrar una base para este subespacio.