CÁLCULO INTEGRAL

GUIA No 8

SUCESIONES Y SERIES

1. Sucesiones y Series

1) Determine si las siguientes sucesiones convergen o divergen:

1) $x_n = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

2) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{5^n+6^n}{7^n+8^n}}$

3) $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}$

4) $x_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$

5) $x_n = \left(\dfrac{2+n}{n-2}\right)^n$

6) $x_n = \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

7) $x_n = \sqrt[n]{4^n+7^n}$

8) $x_n = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

9) $x_n = \sqrt[n]{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n+\left(\dfrac{5}{4}\right)^n}$

10) $x_n = \dfrac{1+4+9+16+\ldots+n^2}{n^3}$

11) $x_n = \dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$

12) $x_n = \dfrac{1+9+25+49+\ldots+(2n-1)^2}{4+16+36+\ldots+(2n)^2}$

13) $x_n = \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$

14) $x_n = n\left(\sqrt{2n^2-3}-5n\right)$

15) $x_n = \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

16) $x_n = \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$

17) $x_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$

18) $x_n = \left(\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$

19) $x_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

20) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$

21) $x_n = \dfrac{n}{n+1}Sen\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

22) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{2n+3}\right)^{2n+3}$

23) $x_n = \left(\dfrac{n-a}{n-b}\right)^{\frac{na}{b}}$

24) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$

25) $x_n = \dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$

26) $x_n = \dfrac{(n+1)\ln(n) - n\ln(n+1)}{\ln(n)}$

27) $x_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{4n^4+5}}$

28) $x_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n}$

29) $x_n = \dfrac{1}{1\text{x}2} + \dfrac{1}{2\text{x}3} + \dfrac{1}{3\text{x}4} + \ldots + \dfrac{1}{n\text{x}(n+1)}$

30) $x_n = \sqrt[n]{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + \left(\dfrac{4}{3}\right)^n}$

2) Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$. Esta proposición permite escribir $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) = \int\limits_a^b f(x)dx$, en particular, si a=0 y b=1, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)dx$. Con base en este comentario, determine a qué convergen las siguientes sucesiones:

1) $f(n) = \dfrac{\pi}{2\text{n}}\left[1 + \text{Cos}\dfrac{\pi}{2\text{n}} + \text{Cos}\dfrac{2\pi}{2\text{n}} + \ldots + \text{Cos}\dfrac{(\text{n-1})\pi}{2\text{n}}\right]$

2) $f(n) = \dfrac{\pi}{n}\left[Sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + Sen\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + Sen\left(\dfrac{3\pi}{n}\right) + \ldots + Sen\left(\dfrac{n\pi}{n}\right)\right]$

3) $f(n) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-9}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$

4) $f(n) = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+4} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$

5) $f(n) = \dfrac{\sqrt[n]{e^2} + \sqrt[n]{e^4} + \sqrt[n]{e^6} + \ldots + \sqrt[n]{e^{2n}}}{n}$

6) $f(n) = \left(\dfrac{1^\text{k} + 2^\text{k} + 3^\text{k} + \ldots + \text{n}^\text{k}}{\text{n}^{\text{k}+1}}\right)$

7) $f(n) = \dfrac{\sqrt[\text{n}]{\text{n}!}}{\text{n}}$

8) $f(n) = \dfrac{1}{\text{n}}\left[\sqrt{1+\dfrac{1}{\text{n}}} + \sqrt{1+\dfrac{2}{\text{n}}} + \ldots + \sqrt{1+\dfrac{\text{n}}{\text{n}}}\right]$

9) $f(n) = \dfrac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[3]{\text{n}}}{\sqrt[3]{\text{n}^4}}$

10) $f(n) = \dfrac{\left(1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k\right)}{n^{k+1}}$

11) $f(n) = \left(\dfrac{2^{\frac{1}{\text{n}}}}{\text{n}+1} + \dfrac{2^{\frac{2}{\text{n}}}}{\text{n}+\dfrac{1}{2}} + \ldots + \dfrac{2^{\frac{\text{n}}{\text{n}}}}{\text{n}+\dfrac{1}{\text{n}}}\right)$

12) $f(n) = \dfrac{1}{n^8}\sum\limits_{k=1}^{n} k^7$

13) $f(n) = \dfrac{1}{n^9}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(nk^7 + k^8\right)$

14) $f(n) = \dfrac{\left(e^{1/n} + e^{2/n} + e^{3/n} + \ldots + e^{n/n}\right)}{n}$

15) $f(n) = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

3) Determine la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)(k+x+2)}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right)$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}$

f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+1}{5k^2-1}$

h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+2)!}$

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$

j) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log\left[\left(1+1/n\right)^n (1+n)\right]}{(\log n^n)\left[\log(n+1)^{n+1}\right]}$

4) Expresar cada decimal como una serie infinita, halar la suma de la serie y con ella expresar x como cociente de dos enteros:

a) x = 0,44444 . . . .

b) x = 0,515151 . . . .

c) x = 2,0202020 . . . .

d) x = 0,123123123 . . . .

e) x = 3,102302020202 . . . .

5) Use la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, si $|x|<1$, para determinar a qué convergen las siguientes series:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k}$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^{2k}$

e) $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}$

f) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{2k}$

g) $\sum_{n=1} \frac{n-1}{n!}$

h) $\sum_{n=1} \frac{(n-1)(n+1)}{n!}$

i) $\sum_{n=1} \frac{n+1}{n!}$

6) Justifique las siguientes igualdades, para |x|<1:

a) $\sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$

b) $\sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = arctan(x)$

c) $\sum_{n=1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

d) $\sum_{n=1} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

e) $\sum_{n=1} n^2 x^n = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$ f) $\sum_{n=1} n^3 x^n = \dfrac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

g) $\sum_{n=1} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ h) $\sum_{n=1} \dfrac{x^n}{n} = \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

i) $\sum_{n=0} \dfrac{(n+1)(n-1)}{2!} x^n = \dfrac{1}{(1-x)^3}$ j) $\sum_{n=0} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} x^n = \dfrac{1}{(1-x)^4}$

7) Encuentre el valor de m, para el cual es válida la igualdad $\sum_{n=1} \dfrac{n^3}{n!} = me$.

8) Use un criterio válido para justificar la convergencia o divergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ b) $\sum_{n=1} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

c) $\sum_{n=1} \dfrac{1}{n \log n (\log\log n)^m}$ d) $\sum_{n=1} n e^{-n^2}$

e) $\sum_{n=1} \left(\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx\right)$ f) $\sum_{n=1} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

g) $\sum_{n=1} \dfrac{n!}{2^{2n}}$ h) $\sum_{n=1} (n^{1/n}-1)^n$

i) $\sum_{n=1} \left(\dfrac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$ j) $\sum_{n=1} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$

k) $\sum_{n=1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ (Estudie valores de p) l) $\sum_{n=1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

m) $\sum_{n=1} \dfrac{(-1)^n n^2}{n^2+1}$ n) $\sum_{n=1} \dfrac{(-1)^n}{n \log^2(n+1)}$

o) $\sum_{n=1} (-1)^n \left(1 - Cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ p) $\sum_{n=1} (-1)^n \arctan\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)$

q) $\sum_{n=1} \dfrac{2^n n!}{n^n}$ r) $\sum_{n=1} \dfrac{\log(n)}{n\sqrt{n+1}}$

s) $\sum_{n=1} \dfrac{3^n n!}{n^n}$ t) $\sum_{n=2} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\log(n)}}$

u) $\sum_{n=1} \dfrac{n!}{n^n}$ v) $\sum_{n=3} \dfrac{1}{(\log(n))^n}$

9) Use la serie $\sum_{n=0} \frac{x^n}{n!} = e^x$ para todo x, para resolver los siguientes problemas:

a) ¿A qué converge la serie $\sum_{n=1} \frac{n-1}{n!}$?

b) ¿A qué converge la serie $\sum_{n=1} \frac{(n-1)(n+1)}{n!}$?

c) ¿A qué converge la serie $\sum_{n=1} \frac{n+1}{n!}$?

d) ¿A qué converge la serie $\sum_{n=1} \frac{n^2 x^n}{n!}$?

e) ¿A qué converge la serie $\sum_{n=1} \frac{n^3}{n!}$?

10) Justifique los siguientes desarrollos de Taylor:

a) $a^x = \sum_{n=1} \frac{(\log a)^n}{n!} x^n$, (a>0)

b) $Senhx = \sum_{n=1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

c) $e^{-x} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$, (a>0)

d) $Coshx = \sum_{n=0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

e) $\frac{1}{2-x} = \sum_{n=1} \frac{x^n}{2^{n+1}}$

f) $Sen^2 x = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$

g) $Sen^3(x) = \frac{3}{4} \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

h) $\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

i) $\log(x+1) = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

j) $Arc\tan(x) = \sum_{n=0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

11) Obtener la serie de Taylor de la función f(x) = Sen(x) alrededor de a=0.

a) Obtener la serie de Taylor de f(x) = Sen(x^2) alrededor de a=0.

b) Calcule la integral $\int_0^1 \mathrm{Sen}(x^2)dx$

c) Compare el resultado con el resultado obtenido usando el método de Simpson.

12) Obtener la serie de Taylor de la función f(x) = Cos(x) alrededor de a=0.

a) Obtener la serie de Taylor de f(x) = $Cos\left(\sqrt{x}\right)$ alrededor de a=0.

b) Calcule la integral $\int_0^1 Cos\left(\sqrt{x}\right)dx$

c) Compare el resultado con el resultado dado usando el método de los trapecios.

13) Obtener la serie de Taylor de la función f(x) = e^x alrededor de a=0.

a) Obtener la serie de Taylor de f(x) = e^{-x^2} alrededor de a=0.

b) Calcule la integral $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

c) Compare el resultado con el resultado obtenido usando el método de los trapecios.

14) Obtener la serie de Taylor de la función f(x) = Sen(x) alrededor de a=0.

a) Obtener la serie de Taylor de f(x) = $\dfrac{Sen(x)}{x}$ alrededor de a=0.

b) Calcule la integral $\int_0^{\pi/2} \dfrac{Sen(x)}{x}\,dx$

c) Compare el resultado con el resultado obtenido usando el método de Simpson.

15) Obtener la serie de Taylor de la función f(x) = e^x alrededor de a=0.

a) Obtener la serie de Taylor de f(x) = $\dfrac{e^x}{x}$ alrededor de a=0.

b) Calcule la integral $\int_1^3 \dfrac{e^x}{x}\,dx$

c) Compare el resultado con el resultado obtenido usando el método de trapecios.