CÁLCULO INTEGRAL
GUIA No 7

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

1. Cálculo de áreas

Si R es la región limitada por las líneas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, con $f(x) \geq g(x)$, entre $x = a$ y $x = b$, el área de R viene dada por la integral A:

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

EJERCICIOS:

1) Calcular el área de la región limitada por la curva $y = 2^x$, el eje X, en el intervalo [0,2].

2) Calcular el área de la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje X, en el intervalo [0,4].

3) Calcular el área limitada por las curvas $\sqrt{y} + \sqrt{x} = 1$, $x + y = 1$.

4) Calcular el área de la región limitada por las líneas $y = 2^x$, $y - x = 1$.

5) Calcular el área de la región limitada por las líneas $y = x\ln(x)$, $y = x$.

6) Calcular el área de la región limitada por los ejes coordenados y la línea $\sqrt{y} + \sqrt{x} = 1$.

7) Calcular el área de la región limitada por la línea $yx - \ln(x) = 0$, el eje X, en el intervalo [a,b], donde a es el intercepto con el eje X y b es la abscisa del punto máximo.

8) Calcular el área de la región limitada por las líneas $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.

9) La función $y = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ presenta un punto máximo y un punto de inflexión. Calcular el área bajo la curva, sobre el eje X y entre los dos puntos críticos nombrados.

10) Hallar el área bajo la curva $y = \log(x)$, sobre el eje X, en el intervalo [1,5].

11) Hallar el área bajo $y = x^2e^{-x}$, sobre el eje X y limitada por las abscisas de los máximos y mínimos de la función.

12) Hallar el área encerrada por la línea $y = xe^{-x}$, sobre el eje X, desde $x = 0$ hasta el máximo de la función.

13) Calcular el área de la región limitada por la curva $4x^2 + 9y^2 = 36$.

14) Calcular el área limitada por la curva $y = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$, el eje X, desde x = 0 hasta x = 3/2.

15) Hallar el área de la región limitada por el folio de la curva $y^2 = x^2(2 - x)$.

16) Hallar el área de la región limitada por las líneas xy = a, y - ax = 0, ay - x = 0, a≥2.

17) Hallar el área de la región limitada por las líneas $y = \left|2 - x^2\right|$, $y = 1 + |x|$.

18) Hallar el área de la región limitada por la línea $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$, el eje X, entre sus dos valores extremos.

19) Calcular el área de la región limitada por las líneas $y^2 = x + 1$, y = x - 1.

20) Determinar el área de la región limitada por la curva $y = x(\ln(x))^2$, el eje X y las ordenadas x = 1, x = e.

Sea R la región limitada por las líneas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, con $f(x) \geq g(x)$, entre $x = a$ y $x = b$. Entonces el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar R alrededor del eje X viene dada por la integral $V_1 = \pi\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx$.

Si R es la región limitada por las líneas $x = f(y)$ y $x = g(y)$, con $f(y) \geq g(y)$, entre $y = c$ y $y = d$. Entonces el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar R alrededor del eje Y viene dada por la integral $V_2 = \pi\int_c^d \left(f^2(y) - g^2(y)\right)dy$.

Sea R es la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje X, las rectas $x = a$ y $x = b$, $f(x) \geq 0$, $a \geq 0$. Entonces el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar R alrededor del eje Y viene dada por la integral $V_3 = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

EJERCICIOS:

1) Sea R la región limitada por las líneas $y = r$, eje X, $x = 0$, $x = h$. Hallar el volumen del cilindro obtenido al girar R alrededor del eje X.

2) Sea R la región limitada por las líneas $y = r$, $y = 2r$, $x = 0$, $x = h$. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje X.

3) Sea R la región limitada por las líneas $ry = hx$, eje X, $x = 0$, $x = r$. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor de la recta $x = r$.

4) Sea R la región limitada por las líneas $y = x+1$, eje X, $x = 0$, $x = 2$. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje X.

5) Hallar el volumen de cono truncado de altura h y radios de las bases iguales a r y R.

6) Sea R la región limitada por las líneas $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y el eje X. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor: (a) del eje X; (b) del eje Y.

7) Sea R la región limitada por las líneas $y = \mathrm{Sen}(x)$, eje X, $x = 0$, $x = \pi$. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje X.

8) Sea R la región limitada por las líneas $y = \sqrt{x}$, eje X, $x = 0$, $x = 4$. Hallar el volumen del cilindro obtenido al girar R alrededor de: (a) el eje X; (b) el eje Y.

9) Sea R la región limitada por las líneas $y = x^2$ y $y^2 = 4x$. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor: (a) del eje X; (b) del eje Y; (c) de la recta $x = -2$.

10) Sea R la región limitada por encima por la línea $y=\sqrt{4-x^2}$ y por debajo por la línea y = 1. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor de (a) eje X; (b) eje Y.

11) Sea R la región limitada por la línea $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Hallar el volumen del elipsoide obtenido al girar R alrededor del eje X.

12) Una esfera de aluminio de radio 2r es perforada de polo a polo por un taladro de radio r. Calcular el volumen del material removido.

13) Sea R la región limitada por las líneas $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor de: (a) el eje X; (b) la recta x = -2; (c) la recta y = -2; (d) de la recta y = 8.

14) Sea R la región limitada por las líneas $y = 4+x^2$, $y = 6-|x|$. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor: (a) del eje X; (b) del eje Y.

15) Sea R la región limitada por las líneas $y^2 = x + 4$, $y^2 = 4x$. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje Y.

16) Sea R la región limitada por las líneas $y=-\sqrt{1-x^2}$, $2(y+1)=|x|$. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje Y.

17) Sea R la región limitada por las líneas $y=2+\left|1-x^2\right|$, eje X, x = -2, x = 2. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor: (a) del eje X; (b) de la recta y = -1.

18) Sea R la región limitada por las líneas $x^2+y^2=4$, $(y-2)^2+x^2=4$. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor: (a) de la recta y=1; (b) de la recta $y=\sqrt{3}$.

19) Sea R la región limitada por las líneas 2y + 3x = 6, 4y + 3x = 12, eje X. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor de: (a) el eje X; (b) el eje Y ; (c) la recta y = -2.

20) Sea R la región limitada por las líneas 2y = 2-x, 2y = 3x-6, eje Y. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor: (a) del eje Y; (b) del eje X; (c) de la recta x = -2.

21) Sea R la región limitada por la línea $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor : (a) del eje X; (b) del eje Y.

22) Sea R la región limitada por la línea $y = 27x - x^3$, eje Y, y = m, donde m es la ordenada del punto máximo de $y = 27x - x^3$. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor de: (a) el eje Y; (b) el eje X.

23) Sea R la región limitada por $y = \mathrm{Tan}^2(x)$, eje Y, recta $y = \pi/4$. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje Y.

Sean P(a,f(a)) y Q(b,f(b)) dos puntos sobre la línea y = f(x). La longitud de la curva comprendida entre P y Q viene dado por la integral L_1; Si la ecuación está dada en forma paramétrica, la longitud viene dada por la integral L_2.

$$L_1 = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \;;\; L_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\,dt$$

EJERCICIOS:

1) Calcular la longitud del arco de la curva $y = \ln(x)$, desde $x = 1$ hasta $x = 4$.
2) Calcular la longitud del arco de la curva $y = 2^x$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$.
3) Calcular la longitud del arco de la curva $y^3 = x^2$, desde $x = 8$ hasta $x = 27$.
4) Calcular la longitud del arco de la curva $y = \ln(\text{Sen}x)$, desde $x = \pi/6$ hasta $x = \pi/3$.
5) Calcular la longitud del arco de la curva $y = \text{Sen}(x)$, desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$
6) Calcular la longitud del arco de la curva $y^2 = 4x$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.
7) Calcular la longitud del arco de la curva hipocicloide astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.
8) Calcular la longitud del arco de la curva $e^y = (e^x + 1)/(e^x - 1)$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$.
9) Calcular la longitud del arco de la curva $y = \sqrt{x}\,(2/3x - 1/2)$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$.
10) Calcular la longitud del arco de la curva $4y = x^2 - \ln(x^2)$, dentro del intervalo [1,4].
11) Calcular la longitud del arco de la curva $y = \ln(\text{Sec}(x))$, desde $x = \pi/6$ hasta $x = \pi/3$.
12) Calcular la longitud del arco de la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, cortada por los ejes coordenados.
13) Calcular la longitud del arco de la curva $6xy = x^4 + 3$, desde $x = 1$ hasta $x = 4$.
14) Calcular la longitud del arco de la curva cicloide $x = a(1 - \text{Cos}t)$, $y = a(t - \text{Sen}t)$.
15) Calcular la longitud del arco de la curva $y = 2^x$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$
16) Calcular la longitud del arco de la curva hipocicloide astroide $x = a\text{Cos}^3t$, $y = a\text{Sen}^3t$.
17) Calcular la longitud del arco de la curva $y = 2 - t^2$, $x = 4 + t^2$, desde $t = 0$ hasta $t = 2$.
18) Calcular la longitud del arco de la curva $y = \ln(t^2)$, $x = 2t$, desde $t = 1$ hasta $t = 2$.
19) Calcular la longitud del arco de la curva $y = \text{Arctan}(t)$, $x = \ln\left(\sqrt{1+t^2}\right)$, desde $t = 0$, hasta $t = 2$.
20) Calcular la longitud del arco de la curva $y = \text{ArcSen}(e^{-x})$, dentro del intervalo [0,ln(5/4)].

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por separación de variables, o mediante una sustitución adecuada, cuando sea necesario:

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 y^2}{1+x}$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+2y^2}{ySen(x)}$

3) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y+3}{4x+5}\right)^2$

4) $Sec(y)\dfrac{dy}{dx} + Sen(x-y) = Sen(x+y)$

5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+2y-x-2}{xy-3y+x-3}$

7) $\left(x+\sqrt{x}\right)\dfrac{dy}{dx} = y+\sqrt{y}$

8) $y\sqrt{4-x^2}\,\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{4+y^2}$

9) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-1}{x^2-1}$; con y(2)=0

10) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x+y+1}$

11) $\dfrac{dy}{dx} = (x+y+1)^2$

12) $\dfrac{dy}{dx} = Tan^2(x+y)$

13) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-x-y}{x+y}$

14) $\dfrac{dy}{dx} = 2+\sqrt{y-2x+3}$

15) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y-3}{x+y-1}$

16) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-6}{x-y}$

17) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+3y}{3x+y}$

18) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$

19) $\left(1+x^2+y^2+x^2y^2\right)dy = y^2dx$

20) $Sen(x)\left(e^{-y}+1\right)dx = \left(1+Cos(x)\right)dy$

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[\operatorname{Sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{Sen}\frac{2\pi}{n}+\ldots+\operatorname{Sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\sqrt{\frac{n}{n+9}}\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right)$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right]$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left[1+\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2n}+\operatorname{Cos}\frac{2\pi}{2n}+\ldots+\operatorname{Cos}\frac{(n-1)\pi}{2n}\right]$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{(n+n)^2}\right]$

9) $A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

1) Obtener la serie de Taylor de la función f(x) = Sen(x) alrededor de a=0.
   a) Obtener la serie de Taylor de f(x) = Sen(x^2) alrededor de a=0.
   b) Calcule la integral $\int_0^1 \text{Sen}(x^2)dx$
2) Obtener la serie de Taylor de la función f(x) = Cos(x) alrededor de a=0.
   a) Obtener la serie de Taylor de f(x) = $\text{Cos}\left(\sqrt{x}\right)$ alrededor de a=0.
   b) Calcule la integral $\int_0^1 \text{Cos}\left(\sqrt{x}\right)dx$
3) Obtener la serie de Taylor de la función f(x) = e^x alrededor de a=0.
   a) Obtener la serie de Taylor de f(x) = e^{-x^2} alrededor de a=0.
   b) Calcule la integral $\int_0^1 e^{-x^2}dx$
4) Obtener la serie de Taylor de la función f(x) = Sen(x) alrededor de a=0.
   a) Obtener la serie de Taylor de f(x) = $\frac{\text{Sen}(x)}{x}$ alrededor de a=0.
   b) Calcule la integral $\int_0^{\pi/2} \frac{\text{Sen}(x)}{x}dx$
5) Obtener la serie de Taylor de la función f(x) = e^x alrededor de a=0.
   a) Obtener la serie de Taylor de f(x) = $\frac{e^x}{x}$ alrededor de a=0.
   b) Calcule la integral $\int_1^3 \frac{e^x}{x}dx$