INTEGRALES IMPROPIAS

Definición: Una integral se llama impropia cuando el intervalo de integración no es acotado o la función a integrar no es acotada en el intervalo.

Integrales impropias de primera especie: Son las integrales de funciones extendidas a intervalos no acotados. Se presentan tres casos en donde la integral se expresa en términos de límites. Si los límites existen la integral es convergente, de lo contrario es divergente.

a) Si f es continua para todo $x \leq b$, entonces $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{u \to -\infty} \int_{u}^{b} f(x)dx$ es convergente si este límite existe.

b) Si f es continua para todo $x \geq a$, entonces $\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{v \to +\infty} \int_{a}^{v} f(x)dx$ es convergente si este límite existe.

c) Si f es continua para todos los valores de x, y c es cualquier número real, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{u \to -\infty} \int_{u}^{c} f(x)dx + \lim\limits_{v \to +\infty} \int_{c}^{v} f(x)dx$ es convergente si estos límites existen.

Integrales impropias de segunda especie: Son las integrales de funciones no acotadas extendidas a intervalos acotados. Se presentan tres casos en donde la integral se expresa en términos de límites. Si los límites existen la integral es convergente, de lo contrario es divergente.

a) Si f es continua en (a,b] y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, entonces $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{u \to a^+} \int_{u}^{b} f(x)dx$ es convergente si éste límite existe.

b) Si f es continua en [a,b) y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, entonces $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{v \to b^-} \int_{a}^{v} f(x)dx$ es convergente si éste límite existe.

c) Si f es continua en [a,b] excepto en c, a<c<b, y $\lim\limits_{x \to c} |f(x)| = +\infty$, entonces $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{u \to c^-} \int_{a}^{u} f(x)dx + \lim\limits_{v \to c^+} \int_{v}^{b} f(x)dx$ es convergente si éstos límites existen.

Criterio de comparación directa: Sean $f:[a,\infty) \to R$ y $g:[a,\infty) \to R$ dos funciones tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$, entonces:

a) Si $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ converge, entonces $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ converge.

b) a) Si $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ diverge, entonces $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ diverge.

Criterio de la integral para Series: Sea $f:[1,\infty)\to R$ continua, decreciente y de valores positivos para todo $x\geq 1$, entonces:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, si la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ diverge, si la integral $\lim_{u\to+\infty}\int_1^{u} f(x)dx=+\infty$.

EJERCICIOS:

Resolver las siguientes integrales impropias (del 1 al 36):

1) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+12}$

2) $\int_{2}^{\infty}\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}dx$

3) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x(1+x)}$

4) $\int_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$

5) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$

6) $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{a^2+b^2x^2}$

7) $\int_{0}^{4}\frac{dx}{x^2-2x-3}$

8) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x+1}$

9) $\int_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^4}$

10) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$

11) $\int_{0}^{\infty}xe^{-4x}dx$

12) $\int_{-\infty}^{0}x^2e^{x}dx$

13) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}dx$

14) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$

15) $\int_{0}^{\infty}xe^{-x^2}dx$

16) $\int_{0}^{\infty}\mathrm{Sen}(x)dx$

17) $\int_{0}^{\infty}e^{-ax}\mathrm{Sen}(bx)dx$

18) $\int_{0}^{\infty}e^{-ax}\mathrm{Cos}(bx)dx$

19) $\int_{0}^{\pi/2}\left(\mathrm{Sec}(x)-\mathrm{Tan}(x)\right)dx$

20) $\int_{0}^{\infty}e^{-x}\mathrm{Cos}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

21) $\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{1-\mathrm{Sen}(x)}$

22) $\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+2\mathrm{Cos}(x)}$

23) $\int_{2}^{6}\frac{dx}{(6-x)^{3/2}}$

24) $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

25) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

26) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

27) $\int_{-5}^{-3}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$

28) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

29) $\int_{5}^{6}\frac{dx}{(x-5)^{2/3}}$

30) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

31) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln(x)}$

32) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2}$

33) $\int_0^1 \ln(x)dx$

34) $\int_{1/2}^{2} \frac{dx}{x(\ln(x))^{1/5}}$

35) $\int_0^{\pi} \ln(\mathrm{Sen}(x))dx$

36) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2e^x + b^2e^{-x}}$

37) Determine el valor de m para el cual converge la integral $\int_0^1 x^m dx$.

38) Determine el valor de m para el cual converge la integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^m}$.

39) Determine el valor de m para el cual converge la integral $\int_0^1 x^m \ln(x)dx$.

40) Determine el valor de m para el cual converge la integral $\int_0^1 x^m \ln^2(x)dx$.

41) Determine el valor de m para el cual converge la integral $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^m}$.

42) Determine el valor de m para el cual converge la integral impropia $\int_1^{\infty} \left(\frac{mx^2}{x^3+1} - \frac{1}{3x+1}\right)dx$.

43) Determine el valor de m para el cual converge la integral impropia $\int_1^{\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n}\right)dx$.

44) Estudie la convergencia de la integral $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^m}$ para los siguientes casos:

(a) 0<m<1 (b) m=1 (c) m>1

45) Determine por comparación la convergencia de las siguientes integrales:

a) $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)\ldots(x+n)}$ c) $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{Sen}^2(x)}{x^2}dx$

d) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3-x^2-1}$ e) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ f) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x-e^{-x}}$

46) Use el Criterio de la integral para determinar la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^4+1}$ e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^3}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n^2+3n)^2}$

47) Si f(x) es una función definida en el intervalo $[0,\infty)$, la transformada de Laplace de la función f, se define como $\mathcal{L}\left(f(x)\right)=\int_0^{\infty} e^{-px}f(x)dx$. Calcular la transformada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^m$

b) $f(x) = Sen(mx)$

c) $f(x) = Cos(mx)$

d) $f(x) = e^{mx}$

e) $f(x) = Senh(mx)$

f) $f(x) = Cosh(mx)$

g) $f(x) = xSen(mx)$

h) $f(x) = e^{mx}Cos(mx)$

48) La función de densidad de probabilidad de una variable x definida como las horas de vida de una bacteria seleccionada al azar es f(x) = 0.02e-0.02x. ($x\geq 0$). Determine la probabilidad de que una bacteria seleccionada al azar viva: (a) máximo 40 horas, (b) al menos de 50 horas.

49) El número x de días que dura cierto tipo de lámparas tiene una función de densidad de probabilidad igual a $f(x) = 0.25e^{-0.25x}$. ($x\geq 0$). ¿Cuál es la probabilidad de que una lámpara seleccionada al azar dure más de 40 días?

50) El promedio de una variable aleatoria x con función de densidad f(x) se define como $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

(a) ¿Cuál es la vida media de las bacterias del ejercicio 48?,
(b) ¿Cuál es el promedio de vida útil de las lámparas del ejercicio 49?