MÉTODOS DE REDUCCIÓN Y APROXIMACIÓN

1. Fórmulas de Reducción

Fórmulas de Reducción: Existen muchos casos en que la integración no es inmediata y se puede recurrir a expresiones que enlacen linealmente la integral dada con otras más sencillas, este tipo de fórmulas se llaman fórmulas de reducción. Para obtener tales fórmulas se sugiere aplicar el método de integración por partes.

Fórmulas de Conversión: Otra estrategia algebraica, similar a la de encontrar una fórmula de reducción y a la de conversión en fracciones simples, es conocida como método de **coeficientes indeterminados**. Consiste en convertir la integral en una expresión en donde se deben determinar unos coeficientes y en algunas ocasiones calcular una integral más simple. Veamos algunos casos:

Caso 1: $\int P_n(x)e^{ax}dx = Q_n(x)e^{ax} + C$.

Caso 1: $\int P_n(x)\text{Sen}(x)dx = -Q_n(x)\text{Cos}(x) + Q_n'(x)\text{Sen}(x) + C$.

Caso 3: $\int P_n(x)\text{Cos}(x)dx = +Q_n(x)\text{Sen}(x) + Q_n'(x)\text{Cos}(x) + C$.

Caso 4: $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Caso 5: $\int \frac{A\text{Sen}(x)+B\text{Cos}(x)}{C\text{Sen}(x)+D\text{Cos}(x)}dx = A_1x + B_1\ln\left|C\text{Sen}(x)+D\text{Cos}(x)\right| + K$.

Hacer: $A\text{Sen}(x)+B\text{Cos}(x)=A_1[\ C\text{Sen}(x)+D\text{Cos}(x)\ ] + B_1[\ C\text{Cos}(x) - D\text{Sen}(x)\ ]$.

EJERCICIOS:

Obtener fórmulas de reducción para las siguientes integrales:

1) $\int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2) $\int \frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}$

3) $\int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4) $\int x^n e^{ax}dx$

5) $\int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx$

6) $\int (\ln(x))^m dx$

7) $\int x^m \ln(x)dx$

8) $\int \frac{\text{Cos}^n(x)}{\text{Sen}^m(x)}dx$

9) $\int \frac{Sen^{n}(x)}{Cos^{m}(x)}dx$

10) $\int Tan^{n}(x)dx$

11) $\int Ctg^{n}(x)dx$

12) $\int x^{n}Sen(x)dx$

13) $\int x^{n}Cos(x)dx$

14) $\int Sen^{m}(x)Cos^{n}(x)dx$

15) $\int \frac{dx}{(a+bCos(x))^{n}}$

16) $\int \frac{dx}{(aSen(x)+bCos(x))^{n}}$

17) $\int x^{m}(x+a)^{n}dx$

18) $\int x^{m}\left(a+bx^{n}\right)^{p}dx$

19) $\int \frac{dx}{\left(a^{2}+x^{2}\right)^{n}}$

20) $\int \frac{dx}{(a+x)^{m}(b+x)^{n}}$

Resolver las siguientes integrales por el método de los coeficientes indeterminados:

21) $\int \left(4x^{3}-3x^{2}+2x-1\right)e^{5x}dx$

22) $\int \left(x^{3}-x^{2}+x-1\right)e^{2x}dx$

23) $\int \left(4x^{3}-3x^{2}+2x-1\right)Sen(x)dx$

24) $\int \left(x^{3}-x^{2}+x-1\right)Sen(x)dx$

25) $\int \left(3x^{3}-4x^{2}+x-2\right)Cos(x)dx$

26) $\int \left(x^{3}-3x^{2}+3x-1\right)Cos(x)dx$

27) $\int \frac{\left(2x^{2}-x+1\right)^{2}dx}{\sqrt{x^{2}+4x+5}}$

28) $\int \frac{(2x-3)^{3}dx}{\sqrt{4x^{2}-8x+9}}$

29) $\int \frac{2Sen(x)+3Cos(x)}{4Sen(x)+5Cos(x)}dx$

30) $\int \frac{3Sen(x)+5Cos(x)}{7Sen(x)+9Cos(x)}dx$

1. Método del punto medio – Rectángulos:

Sea f :[a,b] → R acotada, y P = {$[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, ... , $[x_{i-1},x_i]$, ... , $[x_{n-1},x_n]$} una partición de intevalo de integración [a,b] tal que $h = x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$ para cada i = 1, 2, …, n; y $f(x_0)$, $f(x_1)$,…, $f(x_n)$ son las imágenes respectivas de x_0, x_1, ... , x_n; Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x_k}\right) h$$

donde $\overline{x_k} = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ es el punto medio de $[x_{k-1}, x_k]$.

2. Método de los trapecios:

Sea f :[a,b] → R acotada, y P = {$[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, ... , $[x_{i-1},x_i]$, ... , $[x_{n-1},x_n]$} una partición de intevalo de integración [a,b] tal que $h = x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$ para cada i = 1, 2, …, n; y $f(x_0)$, $f(x_1)$,…, $f(x_n)$ son las imágenes respectivas de x_0, x_1, ... , x_n; Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$$

3. Método de Simpson:

Sea f :[a,b] → R acotada, y P = {$[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, ... , $[x_{i-1},x_i]$, ..., $[x_{n-1},x_n]$} una partición de intervalo de integración [a,b] tal que $h = x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$ para cada i = 1, 2, …, n; y $f(x_0)$, $f(x_1)$,…, $f(x_n)$ son las imágenes respectivas de x_0, x_1, ... , x_n; Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{k=impar} f(x_k) + 2\sum_{k=par} f(x_k)\right)$$

EJERCICIOS

Resolver las siguientes integrales, utilizando diferentes métodos de aproximación:

1) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 2) $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}dx$ 3) $\int_0^{1/2} Cos\left(e^{x}\right)dx$

4) $\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx$ 5) $\int_0^{\pi} \sqrt{Sen(x)}dx$ 6) $\int_0^2 \sqrt[3]{1+x^3}dx$

7) $\int_0^1 Sen(x^2)dx$ 8) $\int_1^8 \sqrt{ln(x)}dx$ 9) $\int_0^{\pi} \frac{Sen(x)}{x}dx$

10) $\int_{0}^{1} \frac{x}{Cos(x)} dx$ 11) $\int_{0}^{2\pi} \frac{1 - Cos(x)}{x} dx$ 12) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{Cos(x)} dx$

13) $\int_{-\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi/2}} Cos(x^2) dx$ 14) $\int_{0}^{4} \sqrt{\arctan(x)} dx$ 15) $\int_{0}^{1} \sqrt{arc\,sen(x)} dx$

16) $\int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$ 17) $\int_{0}^{3} \sqrt{x^3 - 2} dx$ 18) $\int_{0}^{2} Sen\left(e^{\mathbf{x}}\right) dx$

19) $\int_{0}^{1} Sen(2x^2) dx$ 20) $\int_{0}^{8} \sqrt{1 + \ln(x)} dx$ 21) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{Sen(x)}{x} dx$

22) $\int_{-\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi/2}} Cos(x^2) dx$ 23) $\int_{0}^{2} \sqrt{\arctan(2x)} dx$ 24) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{arc\,sen(x)}}{4} dx$