ESTRATEGIAS ALGEBRAICAS

1. Integrales trigonométricas

Integrales de la forma $\int Sen^m(x)dx$, $\int Cos^m(x)dx$ **:**

a) Si m es impar, m=2n+1, $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$Sen^m(x) = Sen^{2n}(x) \cdot Sen(x) = \left(Sen^2(x)\right)^n \cdot Sen(x) = \left(1-Cos^2(x)\right)^n \cdot Sen(x).$$

Se finaliza con la sustitución z = Cos(x).

$$Cos^m(x) = Cos^{2n}(x) \cdot Cos(x) = \left(Cos^2(x)\right)^n \cdot Cos(x) = \left(1-Sen^2(x)\right)^n \cdot Cos(x).$$

Se finaliza con la sustitución z = Sen (x).

b) Si m es par, m=2n, $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$Sen^m(x) = Sen^{2n}(x) = \left(Sen^2(x)\right)^n = \left(\frac{1-Cos(2x)}{2}\right)^n.$$

Se desarrolla el binomio y se repite el procedimiento si es necesario.

$$Cos^m(x) = Cos^{2n}(x) = \left(Cos^2(x)\right)^n = \left(\frac{1+Cos(2x)}{2}\right)^n.$$

Se desarrolla el binomio y se repite el procedimiento si es necesario.

Integrales de la forma $\int Tan^m(x)dx$, $\int Ctg^m(x)dx$ **:**

a) Si m es impar, m=2n+1, $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$Tan^m(x) = Tan^{2n}(x) \cdot Tan(x) = \left(Tan^2(x)\right)^n \cdot Tan(x) = \left(Sec^2(x)-1\right)^n \cdot Tan(x).$$

Se desarrolla el binomio y se repite el procedimiento si es necesario.

$$Ctg^m(x) = Ctg^{2n}(x) \cdot Ctg(x) = \left(Ctg^2(x)\right)^n \cdot Ctg(x) = \left(Csc^2(x)-1\right)^n \cdot Ctg(x).$$

Se desarrolla el binomio y se repite el procedimiento si es necesario.

b) Si m es par, m=2n, $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$Tan^m(x) = Tan^{2n}(x) = \left(Tan^2(x)\right)^n = \left(Sec^2(x)-1\right)^n.$$

Se desarrolla el binomio, se sustituye $Sec^2(x)=Tan^2(x)+1$ y repite el procedimiento si es necesario. Finalmente se integra por sustitución.

$$Ctg^m(x) = Ctg^{2n}(x) = \left(Ctg^2(x)\right)^n = \left(Csc^2(x)-1\right)^n.$$

Se desarrolla el binomio, se sustituye $Csc^2(x)=Ctg^2(x)+1$ y repite el procedimiento si es necesario. Finalmente se integra por sustitución.

Integrales de la forma $\int Sec^m(x)dx$ y $\int Csc^m(x)dx$:

a) Si m es impar, $m=2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$Sec^m(x) = Sec^{2n+1}(x) = Sec^{2n-1}(x) \bullet Sec^2(x).$$

Se integra por partes, haciendo $u = Sec^{2n-1}(x)$ y $dv = Sec^2(x)$.

$$Csc^m(x) = Csc^{2n+1}(x) = Csc^{2n-1}(x) \bullet Csc^2(x).$$

Se integra por partes, haciendo $u = Csc^{2n-1}(x)$ y $dv = Csc^2(x)$.

b) Si m es par, $m=2n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$Sec^m(x) = Sec^{2n}(x) = \left(Sec^2(x)\right)^{n-1} \bullet Sec^2(x) = \left(Tan^2(x)+1\right)^{n-1} \bullet Sec^2(x).$$

Finalmente integra por sustitución, haciendo z=Tan(x).

$$Csc^m(x) = Csc^{2n}(x) = \left(Csc^2(x)\right)^{n-1} \bullet Csc^2(x) = \left(Ctg^2(x)+1\right)^{n-1} \bullet Csc^2(x).$$

Finalmente integra por sustitución, haciendo z=Ctg(x).

Integrandos de la forma $Sen(mx) \bullet Sen(nx)$, $Sen(mx) \bullet Cos(nx)$, $Cos(mx) \bullet Cos(nx)$:

Las integrales que contienen un integrando de la forma $Sen(mx) \bullet Sen(nx)$, $Sen(mx) \bullet Cos(nx)$ o $Cos(mx) \bullet Cos(nx)$, se pueden convertir en integrales inmediatas aplicando una de las siguientes identidades:

a) $Sen(x)Sen(y) = \frac{1}{2}\left[Cos(x-y) - Cos(x+y)\right]$

b) $Sen(x)Cos(y) = \frac{1}{2}\left[Sen(x-y) + Sen(x+y)\right]$

c) $Cos(x)Cos(y) = \frac{1}{2}\left[Cos(x-y) + Cos(x+y)\right]$

EJERCICIOS:

1) $\int Sen^5(x)dx$ 2) $\int Cos^6(3x)dx$ 3) $\int Cos^5(x)dx$

4) $\int Tan^5(x)dx$ 5) $\int Sen^6(3x)dx$ 6) $\int Ctg^6(3x)dx$

7) $\int \text{Sec}^5(x)dx$

8) $\int \text{Csc}^6(3x)dx$

9) $\int \frac{\text{Cos}^5(x)}{\text{Sen}^3(x)}dx$

10) $\int \frac{\text{Sen}^4(x)}{\text{Cos}^3(x)}dx$

11) $\int \frac{dx}{\text{Sen}^3(x)\text{Cos}^5(x)}$

12) $\int \frac{dx}{\text{Csc}^4(x)\text{Cos}^6(x)}$

13) $\int \text{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)\text{Sen}\left(\frac{x}{5}\right)dx$

14) $\int \text{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{x}{3}\right)dx$

15) $\int \text{Cos}\left(\frac{x}{3}\right)\text{Cos}\left(\frac{x}{5}\right)dx$

2. Sustituciones trigonométricas

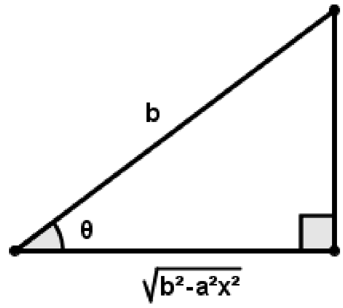
Integrales de la forma $\int x^n \left(b^2 - a^2x^2\right)^{m/2} dx$. $(n, m \in \mathbb{Z},\ m \text{ impar})$

Se aplican las siguientes sustituciones:

$ax = b\text{Sen}(\theta)$ o $x = \frac{b}{a}\text{Sen}(\theta)$.

$dx = \frac{b}{a}\text{Cos}(\theta)d\theta$.

$\sqrt{b^2 - a^2x^2} = b\text{Cos}(\theta)$ y $\theta = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{ax}{b}\right)$



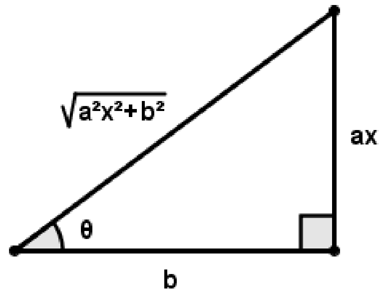
Integrales de la forma $\int x^n \left(a^2x^2 + b^2\right)^{m/2} dx$. $(n, m \in \mathbb{Z},\ m \text{ impar})$

Se aplican las siguientes sustituciones:

$ax = b\text{Tan}(\theta)$ o $x = \frac{b}{a}\text{Tan}(\theta)$.

$dx = \frac{b}{a}\text{Sec}^2(\theta)d\theta$.

$\sqrt{b^2 + a^2x^2} = b\text{Sec}(\theta)$ y $\theta = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{ax}{b}\right)$



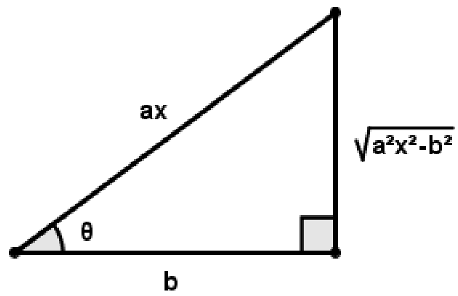
Integrales de la forma $\int x^n \left(a^2x^2 - b^2\right)^{m/2} dx$. $(n, m \in \mathbb{Z},\ m \text{ impar})$

Se aplican las siguientes sustituciones:

$ax = b\text{Sec}(\theta)$ o $x = \frac{b}{a}\text{Sec}(\theta)$.

$dx = \frac{b}{a}\text{Sec}(\theta)\text{Tan}(\theta)d\theta$.

$\sqrt{a^2x^2 - b^2} = b\text{Tan}(\theta)$ y $\theta = \text{Sec}^{-1}\left(\frac{ax}{b}\right)$



EJERCICIOS:

1) $\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}dx$ 2) $\int \sqrt{a^2 + b^2x^2}dx$ 3) $\int \sqrt{a^2x^2 - b^2}dx$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

7) $\int x^4\sqrt{a^2 - x^2}dx$ 8) $\int x^4\sqrt{a^2 + x^2}dx$ 9) $\int x^4\sqrt{x^2 - a^2}dx$

10) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}dx$ 11) $\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^4}dx$ 12) $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4}dx$

13) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 14) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ 15) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

16) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2 - x^2}}$ 17) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2 + x^2}}$ 18) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - a^2}}$

19) $\int \sqrt{\left(9 + 4x^2\right)^3}dx$ 20) $\int \sqrt{\left(4x^2 - 9\right)^5}dx$ 21) $\int x^2\sqrt{\left(1 - 9x^2\right)^5}dx$

22) $\int \sqrt{x^2 + 4x + 9}dx$ 23) $\int \frac{\sqrt{3x^2 + 12x - 5}}{x^2}dx$ 24) $\int \sqrt{6 - 4x - x^2}dx$

25) $\int \sqrt{9 + 4x - 2x^2}dx$ 26) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 12}}$ 27) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 2x - x^2}}$

28) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ 29) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}}}$ 30) $\int \frac{\ln(x)dx}{\sqrt{1 - 4\ln(x) - \ln^2(x)}}$

31) $\int \sqrt{\left(x^2 + x + 1\right)^3}dx$ 32) $\int \sqrt{\left(9 - 4x - x^2\right)^3}dx$ 33) $\int \frac{\mathrm{Sen}(x)dx}{\sqrt{\mathrm{Cos}^2(x) + 4\mathrm{Cos}(x) + 1}}$

34) $\int \sqrt{x^2 - 2ax}dx$ 35) $\int \sqrt{2ax - x^2}dx$ 36) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2ax}}$

37) $\int \sqrt{\left(\frac{4 + x}{4 - x}\right)}dx$ 38) $\int \sqrt{\left(\frac{4 + x}{1 - 4x}\right)}dx$ 39) $\int \sqrt{\left(\frac{x - 9}{9x - 1}\right)}dx$

40) $\int \sqrt{\left(\frac{1 - 4x}{1 + 4x}\right)}dx$ 41) $\int \sqrt{\left(\frac{x - a}{x + a}\right)}dx$ 42) $\int \sqrt{\frac{a - x}{b + x}}dx$

43) Use las sustituciones $x=a(1+\mathrm{Sen}(\theta))$ o $x=2a\mathrm{Sen}^2(\theta)$ para resolver la integral $\int \sqrt{2ax - x^2}dx$.

44) Use las sustituciones $x=a(\mathrm{Sec}(\theta)-1)$ o $x=2a\mathrm{Tan}^2(\theta)$ para resolver la integral $\int \sqrt{2ax + x^2}dx$.

45) Use las sustituciones $x=a\mathrm{Cos}(2\theta)$ o $x=a\mathrm{Sec}(2\theta)$ para resolver las integrales $\int \sqrt{\left(\frac{x - a}{x + a}\right)}dx$ y $\int \sqrt{\left(\frac{a - x}{a + x}\right)}dx$.

Funciones racionales: Una función se llama racional si es de la forma $f(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m}$, es decir, una función racional P(x)/Q(x) es el cociente de dos funciones polinómicas, con $Q(x)\neq 0$. Algunas integrales de funciones racionales que se han desarrollado en este curso son $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$, $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)+C$, $\int \dfrac{dx}{ax+b}=\dfrac{1}{a}\ln|ax+b|+C$.

Fracciones parciales: Para resolver integrales de funciones racionales más complejas que las anteriores, además usar sustituciones, se puede descomponer la función en fracciones simples, es decir, en funciones racionales cuyo denominador sea de la forma $Q(x)=ax+b$ ó $Q(x)=ax^2+bx+c$ irreducible en R.

Si $f(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m}$ es una función racional con $n<m$ y $m\geq 2$, entonces se presentan básicamente cuatro vías de descomposición, en donde debemos hallar los coeficientes indeterminados k_1, k_2, k_3, …, h_1, h_2, h_3, …., según el caso:

a) Cuando $Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m$ se puede expresar como un producto de expresiones de la forma (ax+b) todas diferentes, entonces:

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)...(a_mx+b_m)}=\frac{k_1}{(a_1x+b_1)}+\frac{k_2}{(a_2x+b_2)}+...+\frac{k_m}{(a_mx+b_m)}.$$

b) Cuando $Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m$ se puede expresar como un producto de expresiones de la forma $(ax+b)^z$, entonces:

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{(a_1x+b_1)^{z_1}(a_2x+b_2)^{z_2}...(a_jx+b_j)^{z_j}}=\frac{k_{11}}{(a_1x+b_1)}+\frac{k_{12}}{(a_1x+b_1)^2}+\frac{k_{13}}{(a_1x+b_1)^3}+\frac{k_{1z_1}}{(a_1x+b_1)^{z_1}}+...$$

c) Cuando $Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m$ se puede expresar como un producto de expresiones de la forma (ax^2+bx+c) diferentes e irreducibles en R, entonces:

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{(a_1x^2+b_1x+c_1)...(a_rx^2+b_rx+c_r)}=\frac{k_1(2a_1x+b_1)+h_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)}+...+\frac{k_r(2a_rx+b_r)+h_r}{(a_rx^2+b_rx+c_r)},$$

o también puede ser $\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{(a_1x^2+b_1)...(a_rx^2+b_r)}=\dfrac{k_1x+h_1}{(a_1x^2+b_1)}+...+\dfrac{k_rx+h_r}{(a_rx^2+b_r)}$, cuando los factores del denominador son de la forma (ax^2+b) irreducibles en R.

d) Cuando $Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m$ se puede expresar como un producto de expresiones de la forma $(ax^2+bx+c)^z$ irreducibles en R, entonces:

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{z_1}...(a_rx^2+b_rx+c_r)^{z_r}}=\frac{k_{11}(2a_1x+b_1)+h_{11}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)}+...+\frac{k_{1z_1}(2a_1x+b_1)+h_{1z_1}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{z_1}}+...$$

Vale aclarar que una función racional no solo tiene las anteriores posibilidades de descomposición, también se presentan combinaciones de todos los casos.

EJERCICIOS:

Resolver las siguientes integrales realizando una descomposición apropiada del integrando en fracciones simples:

1) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ 2) $\int \frac{x^2-2x+9}{x^2-5x+6}dx$ 3) $\int \frac{x+3}{x^4+5x^2-6}dx$

4) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ 3) $\int \frac{x^3+4x+5}{(x^2-4)^2}dx$ 6) $\int \frac{xdx}{(x+1)^2(x-3)^3}$

7) $\int \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^3 dx$ 8) $\int \frac{(x+2)^2}{5x^4+4x^2-9}dx$ 9) $\int \frac{dx}{x^6-x^2}$

10) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$ 11) $\int \frac{\sqrt{2}dx}{(1+x^2)^2}$ 12) $\int \frac{dx}{1-x^4}$

13) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}$ 14) $\int \frac{dx}{(x^3+1)(x^3-1)}$ 15) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$

16) $\int \frac{dx}{(x^3-1)^3}$ 17) $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$ 18) $\int \frac{dx}{x^4+1}$

19) $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$ 20) $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$ 21) $\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx$

22) $\int \frac{x^3}{4x^4+5x^2-9}dx$ 23) $\int \sqrt{Tan(x)}\,dx$ 24) $\int \frac{dx}{x^5+1}$

25) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$ 26) $\int \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2 dx$ 27) $\int \sqrt[3]{Tan(x)}\,dx$

28) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ 29) $\int \frac{dx}{1+x^6}$ 30) $\int \frac{dx}{x^4+3x^3-2x^2+3x+1}$

31) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{e^x}+\sqrt[3]{e^x}+\sqrt[6]{e^x}}$ 32) $\int \frac{dx}{x^6+x^2}$ 33) $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$

34) $\int \frac{dx}{x^4+a^4}$ 35) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{Tan(3x)}}$ 36) $\int \frac{dx}{x^5+x^2}$

37) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ 38) $\int \frac{Cos(x)}{Sen^4(x)+1}dx$ 39) $\int \frac{dx}{Sen^4(x)+Cos^4(x)}$

40) $\int \frac{xdx}{x^4-x^3+x^2-x+1}$ 41) $\int \frac{xdx}{x^6+64}$ 42) $\int \frac{x^2dx}{x^4+3x^3+3x^2+3x+1}$

La integral $\int \frac{dx}{(x+a)^m \cdot (x+b)^n}$ se puede resolver aplicando la sustitución $u=\frac{x+a}{x+b}$.

Use esta sustitución para resolver las siguientes integrales:

43) $\int \frac{dx}{(x-2)^2 \cdot (x+3)^3}$ 44) $\int \frac{dx}{(x-1)^3 \cdot (x-3)^4}$ 45) $\int \frac{dx}{(x+2)^3 \cdot (x-1)^2}$

Las integrales de la forma $\int R\left(\text{Sen}(x),\text{Cos}(x)\right)dx$, es decir, en donde el integrando es una función racional de Sen(x) y Cos(x), pueden resolverse mediante una de las siguientes sustituciones:

a) Si $R\left(-\text{Sen}(x),-\text{Cos}(x)\right)\equiv R\left(\text{Sen}(x),\text{Cos}(x)\right)$, se sugieren las sustituciones z=Tan(x) ó z=Ctg(x).

b) Si $R\left(-\text{Sen}(x),\text{Cos}(x)\right)\equiv -R\left(\text{Sen}(x),\text{Cos}(x)\right)$, se sugiere la sustitución z=Cos(x).

c) Si $R\left(\text{Sen}(x),-\text{Cos}(x)\right)\equiv -R\left(\text{Sen}(x),\text{Cos}(x)\right)$, se sugiere la sustitución z=Sen(x).

d) Si $R\left(\text{Sen}(x),\text{Cos}(x)\right)\equiv R\left(\text{Tan}(x)\right)$, se sugieren las sustituciones $z=\text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right)$ o $z=\text{Ctg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

EJERCICIOS:

1) $\int \frac{dx}{\text{Sen}(x)+\text{Cos}(x)}$

2) $\int \frac{dx}{4\text{Sen}(x)-3\text{Cos}(x)}$

3) $\int \frac{\text{Sen}(x)dx}{4\text{Sen}(x)+1}$

4) $\int \frac{\text{Cos}(x)dx}{3-2\text{Cos}(x)}$

5) $\int \frac{2\text{Sen}(x)-3\text{Cos}(x)}{8\text{Sen}(x)+4\text{Cos}(x)}dx$

6) $\int \frac{\text{Sen}(x)+\text{Cos}(x)}{4+3\text{Sen}(x)-4\text{Cos}(x)}dx$

7) $\int \frac{dx}{2+\text{Sen}(x)+\text{Cos}(x)}$

8) $\int \frac{dx}{3+4\text{Tan}(x)}$

9) $\int \frac{dx}{4+\text{Tan}(x)+4\text{Ctg}(x)}$

10) $\int \frac{dx}{1+\text{Sen}^2(x)}$

11) $\int \frac{dx}{1+\text{Cos}^2(x)}$

12) $\int \frac{dx}{\left(\text{Sen}(x)+\text{Cos}(x)\right)^2}$

13) $\int \frac{1+\text{Tan}(x)}{1-\text{Tan}(x)}dx$

14) $\int \frac{dx}{3\text{Sen}^2(x)+5\text{Cos}^2(x)}$

15) $\int \frac{dx}{\text{Sen}^2(x)+3\text{Sen}(x)\text{Cos}(x)-\text{Cos}^2(x)}$

16) $\int \frac{dx}{\text{Sen}^2(x)-5\text{Sen}(x)\text{Cos}(x)}$

17) $\int \frac{\text{Cos}(2x)dx}{\text{Sen}^4(x)+\text{Cos}^4(x)}$

18) $\int \frac{dx}{\left(2-\text{Sen}(x)\right)\left(3-\text{Sen}(x)\right)}$

19) $\int \frac{1 - \text{Sen}(x) + \text{Cos}(x)}{1 + \text{Sen}(x) - \text{Cos}(x)} dx$

20) $\int \frac{\text{Sen}(x)dx}{\text{Sen}^3(x) + \text{Cos}^3(x)}$

21) $\int \frac{\text{Sen}^2(x) - \text{Cos}^2(x)}{\text{Sen}^4(x) + \text{Cos}^4(x)} dx$

22) $\int \frac{dx}{\text{Sen}^6(x) + \text{Cos}^6(x)}$

23) $\int \frac{\text{Sen}(x)\text{Cos}(x)}{1 + \text{Sen}^4(x)} dx$

24) $\int \frac{dx}{\left(\text{Sen}^2(x) + 2\text{Cos}^2(x)\right)^2}$

25) Aplique el cambio $z = \frac{\text{Cos}\left(\frac{x+a}{2}\right)}{\text{Sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}$ para resolver la integral $\int \frac{\text{Cos}^3\left(\frac{x+a}{2}\right)}{\text{Sen}^5\left(\frac{x-a}{2}\right)} dx$.

a) Si la integral es de la forma $\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}\right]dx$. (m,n enteros), se aplica la sustitución $z^n = \frac{ax+b}{cx+d}$.

b) Si la integral es de la forma $\int R\left[x, x^{m_1/n_1}, x^{m_2/n_2}, \ldots, x^{m_k/n_k}\right]dx$. ($m_1, m_2, \ldots, m_k$, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ enteros), se aplica la sustitución $x=z^m$, en donde m es el mínimo común múltiplo de los números n_1, n_2, …, n_k.

c) Si la integral es de la forma $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, se aplica una de las sustituciones de Euler, asi:
- Si a>0, $\sqrt{ax^2+bx+c} = z \pm x\sqrt{a}$.
- Si c>0, $\sqrt{ax^2+bx+c} = zx \pm \sqrt{c}$.
- Si $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = z(x-\alpha)$.

d) Si la integral es de la forma $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$. (m,n,p racionales), se aplica una de las siguientes sustituciones:
- Si $\frac{m+1}{n}$ es entero, se aplica $z^\alpha=a+bx^n$, (α es el denominador de p).
- Si $\frac{m+1}{n}+p$ es entero, se aplica $z^\alpha = \frac{a+bx^n}{x^n}$, ($\alpha$ es el denominador de p).

Estas integrales reconocen como diferenciales binómicas.

EJERCICIOS:

Resolver las siguientes integrales aplicando una sustitución de la forma $x=z^m$ o $z^n = \frac{ax+b}{cx+d}$:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$

2) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$

3) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

5) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$

6) $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$

7) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

8) $\int \frac{x+3}{x^3\sqrt{2x+3}}dx$

9) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

10) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$

11) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

12) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$

13) $\int \frac{\sqrt[3]{2x-3}}{1+\sqrt[3]{2x-3}}dx$

14) $\int \frac{dx}{x\left(2+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)}$

15) $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$

17) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

19) $\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

20) $\int \frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^4+1}}dx$

Resolver las siguientes integrales aplicando una de las sustituciones de Euler:

21) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$

22) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

23) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$

24) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(7x-10-x^2\right)^3}}$

25) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$

26) $\int \frac{dx}{-1+\sqrt{1-x^2}}$

27) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

28) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$

29) $\int \frac{xdx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

30) $\int \frac{x-\sqrt{2+3x+x^2}}{x+\sqrt{2+3x+x^2}}dx$

Resolver las siguientes integrales de diferenciales binómicas aplicando una sustitución apropiada:

31) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

32) $\int \frac{x^3}{\left(1+2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

33) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$

34) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

35) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

36) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

37) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

38) $\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}$

39) $\int \sqrt{x^3+x^4}dx$

40) $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$

41) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$

42) $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$

43) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{\frac{x+1}{x}}}$

44) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

45) $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$

46) $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(2+3x^2\right)^{\frac{3}{4}}}dx$

47) $\int \frac{x^3}{\left(1-x^3\right)^{\frac{4}{3}}}dx$

48) $\int \frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

49) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}dx$

50) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$