CÁLCULO INTEGRAL
GUIA No 3

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

1. Método de Sustitución

El siguiente teorema establece un método que permite calcular una integral realizando una sustitución o cambio de variable:

Teorema: Sean $g:[a,b]\to R$ y $g':[a,b]\to R$ continuas, $A=g(a)$ y $B=g(b)$. Si f es continua sobre $g([a,b])$, entonces $\int_A^B f(x)dx = \int_a^b f\left[g(u)\right]g'(u)du$.

EJERCICIOS:

1) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$

3) $\int \frac{x^3dx}{\left(1+x^2\right)^3}$

4) $\int \left(4x^2+5\right)^{10}xdx$

5) $\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$

6) $\int x^2e^{x^3}dx$

7) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

8) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^3}}dx$

9) $\int \left(\text{Cos}x\cdot\text{Cos}\frac{x}{2}\cdot\text{Cos}\frac{x}{3}\right)dx$

10) $\int \sqrt{x^5-x^4}dx$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

12) $\int \text{Sen}^2(2x)\text{Cos}^2(3x)dx$

13) $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$

14) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx$

15) $\int \frac{\text{ArcTan}(x)}{x^2+1}dx$

16) $\int \sqrt{\frac{\text{ArcSen}(x)}{1-x^2}}dx$

17) $\int \tan(x)\ln^2\left(\text{Cos}(x)\right)dx$

18) $\int \left(\text{Sen}\frac{x}{2}\cdot\text{Sen}\frac{x}{3}\cdot\text{Sen}\frac{x}{4}\right)dx$

19) $\int \frac{x^4dx}{x^2+4}$

20) $\int \frac{\text{Sen}(2x)}{\left(1+\text{Cos}^2(x)\right)^4}dx$

21) $\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

22) $\int x\sqrt{4+3x^2}\,dx$

23) $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

24) $\int \frac{xdx}{x^4+3x^2+2}$

25) $\int \frac{\left(\ln(x)\right)^n}{x}dx$

26) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+13}$

27) $\int \frac{x^5dx}{\left(x^6+1\right)^6}$

28) $\int \frac{(x^2+6x+2)dx}{x^3+9x^2+6x+1}$

29) $\int \frac{dx}{\text{Sen}(2x)\ln\left(\tan(x)\right)}$

30) $\int \text{Cos}^5(5x)dx$

31) $\int \frac{Sec^2(bx)dx}{\sqrt{aTan(bx)+c}}$ 32) $\int \frac{Sen(x/3)}{Sen(x/2)}dx$ 33) $\int Sen^5(4x)\,dx$

34) $\int Sen(x)Cos^5(x)\,dx$ 35) $\int Sen^5(x)Cos(x)dx$ 36) $\int Cos^6(x)Sen(2x)dx$

37) $\int Sen^5(x)Cos^3(x)dx$ 38) $\int Sen^3(x)Cos^5(x)dx$ 39) $\int Sen^5(4x)Sen(8x)dx$

40) $\int Cos^7(x)\sqrt{Sen(x)}dx$ 41) $\int Sen^5\left(x/2\right)\sqrt{Cos\left(x/2\right)}dx$ 42) $\int Sen^5\left(\frac{2x}{3}\right)Cos^7\left(\frac{2x}{3}\right)dx$

43) $\int Csc^4(x)\,Ctg(x)\,dx$ 44) $\int Tan^5(x)\,Sec^2(x)\,dx$ 45) $\int Sec^7(x)\,Tan(x)\,dx$

46) $\int Tan^5(ax)\,dx$ 47) $\int Tan^7\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)dx$ 48) $\int Ctg^9\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)dx$

49) $\int \frac{e^{4x}}{\sqrt{1+e^x}}dx$ 50) $\int \frac{\left(1+\ln(\sqrt{3}x)\right)^4}{\sqrt{3}x}dx$ 51) $\int \frac{Sec(x)dx}{Sen(x)+Cos(x)}$

52) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ 53) $\int \frac{(ArcSec(x))^4}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ 54) $\int \frac{Sen(4x)}{\sqrt[3]{1+Cos^2(2x)}}dx$

55) $\int \frac{\ln(ax)}{\ln(bx)}\frac{dx}{x}$ 56) $\int \frac{a+\ln(\sqrt{b}x)}{a-\ln(\sqrt{b}x)}\frac{dx}{x}$ 57) $\int \frac{1+\ln(x^2)}{1+\ln(x^3)}\frac{dx}{x}$

58) $\int \frac{dx}{a+sen^2(bx)}$ 59) $\int \frac{dx}{b+cos^2(ax)}$ 60) $\int x\sqrt{\left(\frac{x}{2a-x}\right)}dx$

61) Demuestre que: si n es un entero, entonces $\int_0^{\pi} \frac{Sen(2nx)}{Sen(x)}dx = 0$.

62) Demuestre que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

63) Si f:R→R es una función continua periódica de periodo T y $a \in R$, demuestre que $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

64) Muestre con argumentos geométricos que: Para todos los reales a y b se cumple la igualdad $\int_a^{a+2\pi} Sen(x)dx = \int_b^{b+2\pi} Cos(x)dx$.

65) Una función f es de orden exponencial k si existen constantes k, M>0 y N>0 tales que $|f(x)| \le Me^{kx}$ para todo x>N. Si u y v son funciones de orden exponencial y continuas en $[0,\infty)$ entonces la convolución de u y v se define como $u * v = \int_0^x u(T)\bullet v(x-T)\bullet dT$. Calcular:

a) $Sen(2x)*Cos(3x)$ b) $Cos(2x)*Cos(3x)$ c) $Sen(2x)*Sen(3x)$

2. Método de integración por partes

Teorema: Sean u:[a,b]→R y v:[a,b]→R continuas y derivables. Entonces, para todo $x \in [a,b]$ se tiene que $\int_a^x u(t)v'(t)dt = u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^x u'(t)v(t)dt$. En particular $\int_a^b u(t)v'(t)dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$.

EJERCICIOS:

1) $\int \ln(x)dx$

2) $\int x^2\ln(x)dx$

3) $\int \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 dx$

4) $\int \sqrt{x}\ln(x)dx$

5) $\int (\ln(x))^3 dx$

6) $\int \frac{x}{e^{mx}} dx$

7) $\int \frac{x^2}{e^x} dx$

8) $\int x^3e^{x^2}dx$

9) $\int x\mathrm{Cos}(ax)dx$

10) $\int x\mathrm{Sen}(ax)dx$

11) $\int (1+2x)^2 \mathrm{Sen}(2x)dx$

12) $\int x\mathrm{Senh}(2x)dx$

13) $\int \mathrm{ArcCos}(x)dx$

14) $\int \mathrm{ArcCos}\sqrt{\frac{x}{x+a}}dx$

15) $\int \mathrm{ArcCtg}\left(\frac{a}{x+a}\right)dx$

16) $\int x^2\mathrm{Arctan}(x)dx$

17) $\int \mathrm{ArcSen}(x)dx$

18) $\int \mathrm{ArcSen}\left(\sqrt[3]{x}\right)dx$

19) $\int \frac{\mathrm{ArcSen}(x)}{x^2}dx$

20) $\int \mathrm{ArcCos}\left(\frac{1}{x}\right)dx$

21) $\int x\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)^2dx$

22) $\int \left(\mathrm{ArcSen}(x)\right)^2dx$

23) $\int \frac{\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{x}\right)}{x^2}dx$

24) $\int \mathrm{ArcTan}\left(\sqrt{x}\right)dx$

25) $\int \ln\left(x\sqrt{1+x^2}\right)dx$

26) $\int \sqrt{x+1}\,\ln(x+1)dx$

27) $\int x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)dx$

28) $\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx$

29) $\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

30) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

31) $\int \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}dx$

32) $\int \mathrm{Sen}(\ln(x))dx$

33) $\int \mathrm{Cos}(\ln(x))dx$

34) $\int \mathrm{Sen}(x)\ln\left(\mathrm{Tan}(x)\right)dx$

35) $\int e^{ax}\mathrm{Sen}(bx)dx$

36) $\int e^{ax}\mathrm{Cos}(bx)dx$

37) $\int e^{ax}\mathrm{Sen}^2(bx)dx$

38) $\int e^{ax}\mathrm{Cos}^2(bx)dx$

39) $\int xe^{ax}\mathrm{Sen}(bx)dx$

40) $\int xe^{ax}\mathrm{Cos}(bx)dx$

41) $\int x^2e^{2x}\mathrm{Cos}(2x)dx$

42) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

43) $\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

44) $\int x\sqrt{x^2+a^2}\ln\left(\frac{x^2+a^2}{a^2}\right)dx$

45) $\int \frac{x^2e^x}{(2+x)^2}dx$

46) $\int \mathrm{Sec}^3(ax)dx$

47) $\int \mathrm{Csc}^5(ax)dx$

48) $\int \mathrm{Sec}^7(ax)dx$

49) Sea f una función continua n-derivable y $\int_0^x f'(x-t)dt = f(x) - f(0)$. Demuestre la fórmula $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + T_n(x)$, donde $Tn(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x t^{n-1}f^{(n)}(x-t)dt$.

50) $\int u(x)v(x)dx = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u^{(k-1)}(x)v_k(x) - (-1)^{n-1}\int u^{(n)}(x)v_n(x)dx$, donde para cada k=1,2,…,n se tiene que $v_k(x) = \int v_{k-1}(x)dx$. Esta fórmula se conoce como fórmula generalizada de integración por partes. Use esta fórmula para calcular las siguientes integrales:

a) $\int x^5e^{2x}dx$ b) $\int x^4Cos(2x)dx$ c) $\int x^3Sen^2(3x)dx$

51) Si n es cualquier entero positivo, demuestre que $\int_0^{\pi} Sen^2(nx)dx = \frac{\pi}{2}$.

52) Si n es un entero positivo impar, demuestre que $\int_0^{\pi} Cos^n(x)dx = 0$.

53) Demuestre que $\int Sen^n(x)dx = -\frac{1}{n}Sen^{n-1}(x)Cos(x) + \frac{n-1}{n}\int Sen^{n-2}(x)dx$, si n es un entero mayor que 1.

54) Demuestre que $\int Cos^n(x)dx = \frac{1}{n}Cos^{n-1}(x)Sen(x) + \frac{n-1}{n}\int Cos^{n-2}(x)dx$, si n es un entero mayor que 1.

55) Demuestre que $\int Tan^n(x) = \frac{1}{n-1}Tan^{n-1}(x) - \int Tan^{n-2}(x)dx$, si n es un entero mayor que 1.

56) Demuestre que $\int x^nSen(x)dx = -x^nCos(x) + n\int x^{n-1}Cos(x)dx$, si n es un entero positivo.

57) Demuestre que $\int \frac{Sen(x)}{x^n}dx = -\frac{Sen(x)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{Cos(x)}{x^{n-1}}dx$, si n es un entero mayor que 1.

58) Demuestre que $\int Sec^n(x)dx = \frac{1}{n-1}Tan(x)Sec^{n-2}(x) + \frac{n-2}{n-1}\int Sec^{n-2}(x)dx$, si n es un entero positivo.

59) Demuestre que $\int Csc^n(x)dx = -\frac{1}{n-1}Ctg(x)Csc^{n-2}(x) + \frac{n-2}{n-1}\int Csc^{n-2}(x)dx$, si n es un entero positivo.

60) Demuestre que $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$, si n es un entero positivo.