FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA INTEGRAL

1. Introducción

Desde sus orígenes, el cálculo se ha ocupado fundamentalmente por la formulación y resolución de dos problemas:

- Determinar un número que mida la pendiente de una recta tangente a una curva (Problema que resuelve el cálculo diferencial).
- Determinar un número que mida el área de una región dada (Problema que resuelve el cálculo integral).

Primer problema:

Este problema está relacionado con el análisis del movimiento en un instante dado, del cual se sabe que fue una preocupación muy común entre los filósofos desde la antigüedad. Newton estudió el movimiento en un instante tomando intervalos que contenían dicho instante. En su método, Newton supone que pueden hacerse mediciones de distancias y tiempos con absoluta precisión y se apoya en el modelo $v_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ para calcular velocidad media en un intervalo de tiempo $[t_1,t_2]$.

Newton hace $t_2 - t_1 = h$, y define la velocidad instantánea como el valor al cual tiende la velocidad media cuando la diferencia entre t_2 y t_1 tiende a cero. Es decir, si s(t) representa la posición de un objeto en el tiempo t, entonces la velocidad instantánea cuando t=a es $v_{inst} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$.

Para visualizar la velocidad media del objeto en un intervalo $[t_1,t_2]$, se determina su posición s(t) cuando $t=t_1$ y $t=t_2$, se dibuja el triángulo rectángulo cuyos catetos miden (t_2-t_1) y $s(t_2)-s(t_1)$, como se muestra en la figura.

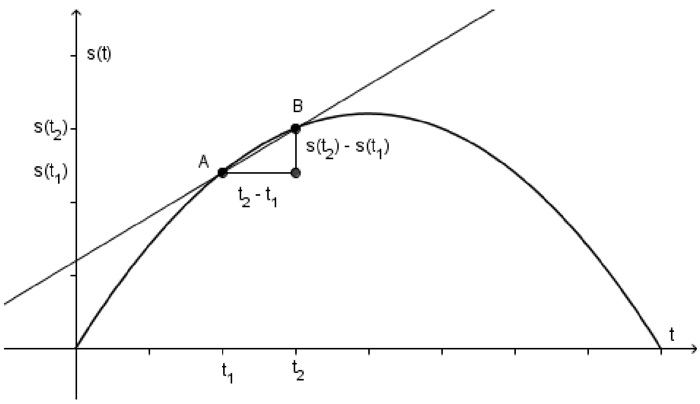


Figura 1.

En la figura 1, la pendiente de la recta secante AB es $m_{AB} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ y la velocidad media del objeto es $v_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$.
Entonces, la velocidad media en el intervalo de tiempo $[t_1,t_2]$ es la pendiente de la recta secante que pasa por puntos $(t_1,s(t_1))$ y $(t_2,s(t_2))$, y por lo tanto, la velocidad instantánea cuando $t=t_1$ será la pendiente de la recta tangente cuando $t=t_1$.

Segundo problema:

Este problema está relacionado con el cálculo de la distancia total recorrida por un objeto durante un intervalo de tiempo [a,b] si se sabe que la velocidad no es constante.
Cuando la velocidad es constante, la distancia puede calcularse con el modelo d = vt, pero si la velocidad es variable se debe contar con mediciones de velocidades durante intervalos de tiempos más cortos que [a,b].

Supóngase que la velocidad es creciente y que [a,b] se divide en n partes iguales, tales que $a=t_0<t_1<t_2<t_3<\ldots t_{k-1}<t_k<\ldots<t_{n-1}<t_n=b$, aquí la longitud de cada subintervalo de tiempo es $|t_k - t_{k-1}| = \frac{b-a}{n} = h$.

Se hace una estimación de la distancia d recorrida encontrando la distancia mínima posible (d_{min}) y la distancia máxima posible (d_{max}), así $d_{min} < d < d_{max}$.

Para obtener la distancia mínima recorrida se calcula la mínima distancia recorrida d_k para cada subintervalo de tiempo $[t_{k-1},t_k]$ tomando la velocidad v_k mínima durante cada subintervalo y multiplicándola por $t_k - t_{k-1}$, finalmente se suman las distancias d_k.

Para obtener la distancia máxima recorrida se calcula la máxima distancia recorrida d_k para cada subintervalo de tiempo $[t_{k-1},t_k]$ tomando la velocidad v_k máxima durante cada subintervalo y multiplicándola por $t_k - t_{k-1}$, finalmente se suman las distancias d_k.

Si v=f(t) es la velocidad en el tiempo t, entonces:

$$d_{min} = hf(t_0)+hf(t_1)+hf(t_2)+\ldots+hf(t_{n-1}) = \sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{b-a}{n}\right)f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

$$d_{max} = hf(t_1)+hf(t_2)+hf(t_3)+\ldots+hf(t_n) = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

Si d representa la distancia exacta recorrida por el objeto, entonces se tiene que $d_{min} \le d \le d_{max}$, y $d_{max} - d_{min} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además, d_{min} aumenta a medida que n aumenta, y la d_{max} disminuye a medida que n aumenta.

Ambas estimaciones de la distancia se aproximan al área de la región limitada por la línea v=f(t) y el eje t, entre las rectas t=a y t=b.

El problema de calcular el área bajo la curva, en ocasiones se relaciona con el problema de determinar la velocidad de un objeto si se conocen mediciones de la aceleración del objeto en diferentes momentos.

EJERCICIOS:

1) Un vehículo se detiene 12 segundos después que el conductor aplicó los frenos. Las velocidades del vehículo mientras están aplicados los frenos se registran en la siguiente tabla:

Tiempo desde aplicación de frenos	0	4	8	12
Velocidad (m/seg)	88	45	16	0

a) Determine las estimaciones superior e inferior de la distancia recorrida por el vehículo después de aplicar los frenos.
b) Muestre las estimaciones anteriores en un gráfico de de Velocidad en función del tiempo.

2) Un ciclista que se mueve por un terreno plano se detiene 10 segundos después que dejó de pedalear su bicicleta. Durante ese periodo, al inicio de cada dos segundos se observaron las siguientes velocidades:

t (segs)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
v (m/segs)	64	34	18	10	4	0

a) Determine las estimaciones superior e inferior de la distancia recorrida por el ciclista después de dejar de pedalear su bicicleta.
b) En una gráfica de la velocidad en función del tiempo, muestre las estimaciones superior e inferior de la distancia recorrida.

3) Boris se inscribe en un maratón y su promotor lo sigue en una moto para medir su velocidad cada 15 minutos. Boris comienza rápido pero a medida que transcurren los minutos no puede aumentar su velocidad; después de 90 minutos está muy cansado y decide detenerse. Los datos que tomó el promotor se resumen en la siguiente tabla:

t (min)	0	15	30	45	60	75	90
v (mill/min)	16	14	11	11	8	6	0

a) Calcule las estimaciones superior e inferior de la distancia recorrida por Boris durante los primeros 30 minutos.
b) Determine las estimaciones superior e inferior de la distancia total recorrida por Boris en los 90 minutos.
c) ¿Con qué frecuencia el promotor debe medir la velocidad de Boris para que las estimaciones superior e inferior difieran en menos de 1/10 de milla?

4) Una partícula se mueve a una velocidad de $v(t) = 2 + 0.5t^2$ m/seg para $0 \leq t \leq 8$ segundos. Use intervalos de tiempo $\Delta t = 2$ segundos para estimar la distancia máxima y mínima recorrida por la partícula durante este tiempo, y luego calcule el promedio de las dos.

5) Una tortuga se arrastra a lo largo de una playa a una velocidad igual a $v(t) = \frac{1}{1+t}$ metros/hora durante un tiempo $0 \leq t \leq 1$ hora. Use intervalos de tiempo $\Delta t = 6$ minutos para estimar la distancia máxima y mínima recorrida por la tortuga durante esta hora, y calcule el promedio de las dos.

6) En la figura 2, considere la región R limitada por la curva $y = 8e^{-x^2/25}$, el eje horizontal y las rectas verticales $x= -5$ y $x= 5$.

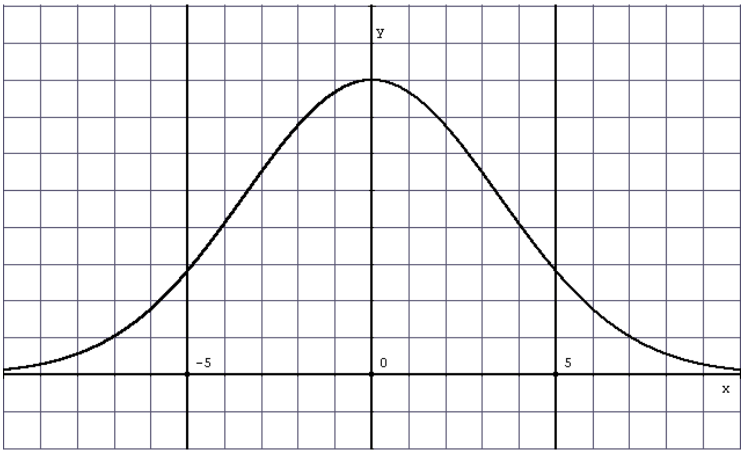


Figura 2.

a) Use la cuadrícula para estimar el área de la región R.
b) Calcule una estimación superior y una inferior que difieran entre sí menos de 4 unidades cuadradas.
c) Estime el área de la región limitada por la curva $y = 8e^{-x^2/25}$, el eje horizontal y las rectas verticales $x=0$ y $x=5$ con un error máximo de 0.1 unidades cuadradas.

7) Un paracaidista salta desde un avión y después que abre el paracaídas su aceleración va disminuyendo debido a la resistencia del aire. La siguiente tabla muestra la aceleración (m/seg^2) a los t segundos.

t	0	1	2	3	4	5
a	9.80	8.20	6.60	5.40	4.40	3.60

a) Determine las estimaciones superior e inferior de su velocidad cuando t = 5 segundos.
b) Obtenga una nueva estimación con el promedio de las dos anteriores.

8) La figura 3 es la gráfica de velocidad (m/seg) de un yate Boston Whaler que navega en las costas del golfo de México. Estime la distancia total que recorre el yate entre t=0 y t=10.

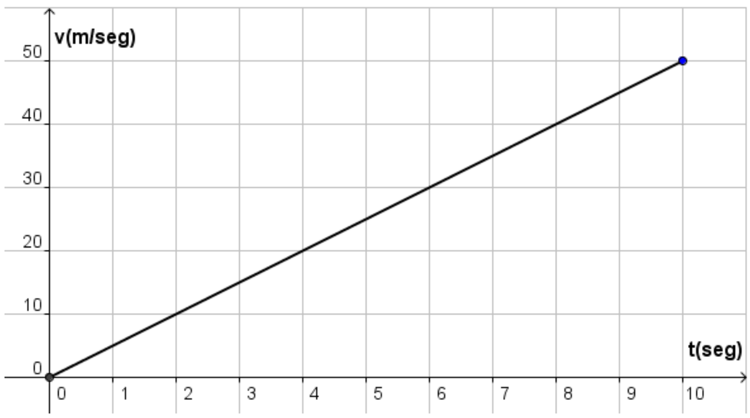
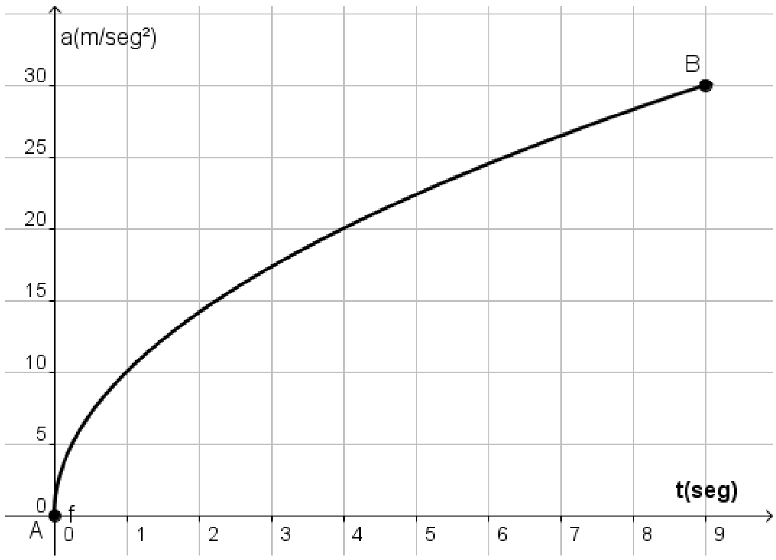


Figura 3.

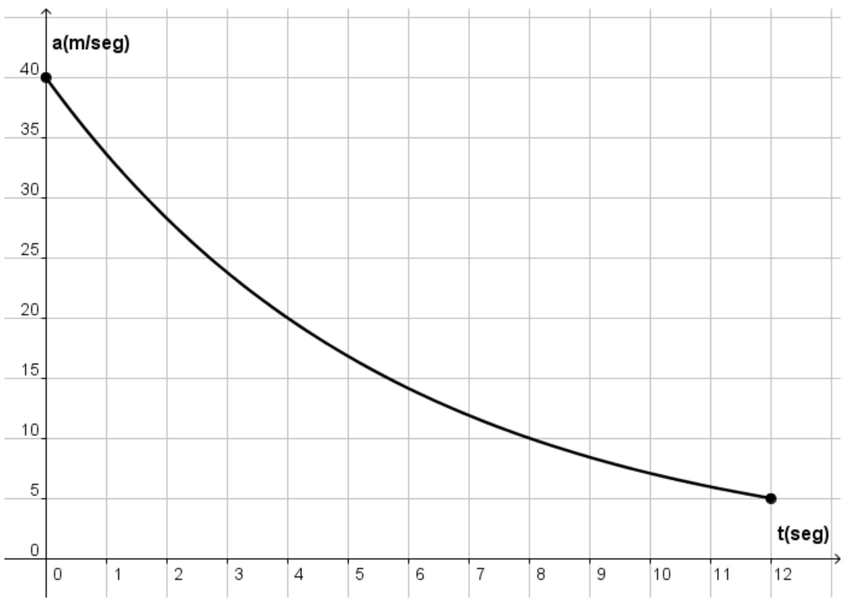
9) La figura 4 es la gráfica de aceleración (m/seg^2) de un objeto. Determine las estimaciones superior e inferior de la velocidad cuando t=10.



$$a(t) = 10\sqrt{t}$$

Figura 4.

10) La figura 5 es la gráfica de aceleración (m/seg^2) de un ciclista que gana una etapa de un tour, hasta 12 segundos después de pasar por la línea de meta. Su aceleración va disminuyendo como se muestra en la tabla. Determine las estimaciones superior e inferior de la velocidad cuando t=10 y t=12.



$$a(t) = \frac{40}{2^{x/4}}$$

Figura 5.

2. Sumas de Riemann

Definición:
Una partición P de un intervalo acotado y cerrado [a,b] en R, es un conjunto ordenado y finito de puntos $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ tales que $a=x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{n-1} < x_n=b$. La norma de la partición es $\|P\| = \sup\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$.

Definición:
Sea $f:[a,b]\to R$ acotada y $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ una partición de [a,b]. Si $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}, p_n\}$ son puntos de [a,b] tales que $x_{k-1} \le p_k \le x_k$ para k=1,2,…,n entonces la suma $S(P,f) = \sum_{k=1}^{k=n} f(p_k)(x_k - x_{k-1})$ se denomina suma de Riemann para f con respecto a la partición P y los puntos p_k.

Si los puntos p_k son los extremos izquierdos de cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$, entonces la suma $S_i(P,f) = \sum_{k=1}^{k=n} f(p_{k-1})(x_k - x_{k-1})$ se llama Suma izquierda.

Si los puntos p_k son los extremos derechos de cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$, entonces la suma $S_d(P,f) = \sum_{k=1}^{k=n} f(p_k)(x_k - x_{k-1})$ se llama Suma derecha.

Si los puntos p_k son tales que $f(p_k)$ son los valores ínfimos de la función en cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$, entonces la suma $\underline{S}(P,f) = \sum_{k=1}^{k=n} f(p_k)(x_k - x_{k-1})$ se llama Suma inferior para f con respecto a la partición P y los puntos p_k. Usualmente estos valores $f(p_k)$ se denotan m_k.

Si los puntos p_k son tales que $f(p_k)$ son los valores supremos de la función en cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$, entonces la suma $\overline{S}(P,f) = \sum_{k=1}^{k=n} f(p_k)(x_k - x_{k-1})$ se llama Suma superior para f con respecto a la partición P y los puntos p_k. Usualmente estos valores $f(p_k)$ se denotan M_k.

Procedimiento:
Supóngase que f es una función creciente definida en [a,b]. Se divide el intervalo [a,b] en n partes iguales, obteniéndose que cada subintervalo tiene longitud $h = \frac{b-a}{n}$. Con esta división de [a,b] se obtiene la partición {a, a+h, a+2h, … , a+(n-1)h, a+nh=b}.

Para hallar el área A de la región limitada por la función f, el eje x, en el intervalo [a,b], se pueden considerar las sumas de las áreas de los rectángulos. Si se toman los rectángulos por debajo de la curva se obtendrá una suma de áreas inferior al área A de la región (ver figura 6). Si se toman los rectángulos por encima de la curva se obtendrá una suma de áreas superior al área A de la región (ver figura 7).

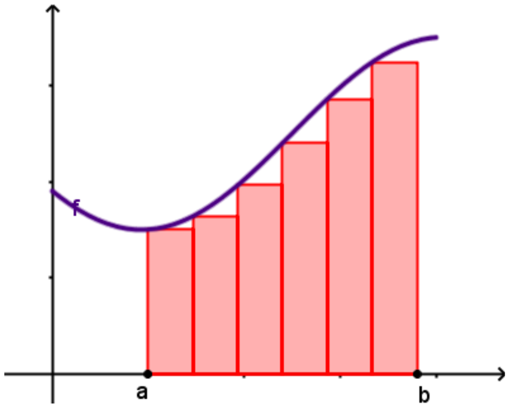


Figura 6: Suma inferior

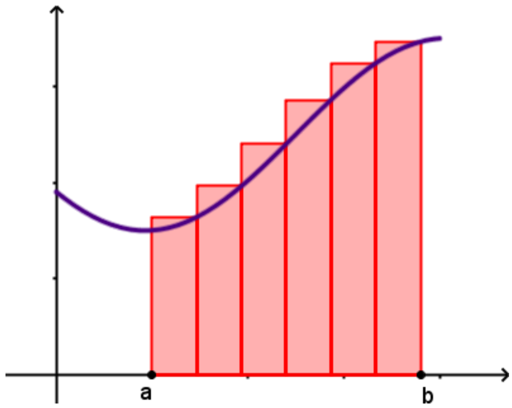


Figura 7: Suma superior

La suma inferior es $\underline{S}=hf(a)+hf(a+h)+...+hf(a+(n\text{-}1)h)=\sum_{k=0}^{k=n-1} hf(a+kh)$.

La suma superior es $\underline{S}=hf(a+h)+hf(a+2h)+...+hf(a+nh)=\sum_{k=1}^{k=n} hf(a+kh)$.

Las anteriores sumas se llaman sumas de Riemann. Se sustituye $h=\dfrac{b-a}{n}$ en las sumas y como $\underline{S}<A<\overline{S}$, entonces queda $\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\dfrac{b-a}{n}\right)f\left[a+k\left(\dfrac{b-a}{n}\right)\right]<A<\sum_{k=1}^{k=n}\left(\dfrac{b-a}{n}\right)f\left[a+k\left(\dfrac{b-a}{n}\right)\right]$.

Como $\overline{S}-\underline{S}\to 0$ cuando $n\to\infty$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{b-a}{n}\right)f\left[a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]=\int_b^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f\left[a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

Es decir, cualquiera de las dos sumas conduce a la medida del área cuando $n\to\infty$.

Algunas fórmulas útiles para simplificar estas sumas son:

a) $\sum_{k=1}^{k=n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{k=1}^{k=n} k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\sum_{k=1}^{k=n} k^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

d) $\sum_{k=1}^{k=n} k^4=\dfrac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

e) $\sum_{k=1}^{k=n} k^5=\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$

f) $\sum_{k=1}^{k=n} x^{k-1}=\dfrac{x^n-1}{x-1}$

EJERCICIOS:

1) Use la definición de integral como límite de sumas de Riemann para determinar el área de la región limitada por la gráfica de f(x) = m (m>0), el eje X y las rectas verticales x=a, x=b. (b>a>0)

2) Use la definición de integral como límite de sumas de Riemann para determinar el área del trapecio limitado por la f(x) = mx + b, el eje X y las rectas x=a, x=b. b>a>0, m>0.

3) Demuestre que $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$

4) Demuestre que $\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4}$

5) Demuestre que $\int_a^b x^4 dx = \frac{b^5 - a^5}{5}$

6) Demuestre que $\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$; $m \neq -1$, $b>a>0$.

Sugerencia: Use la partición $P = \{a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, aq^n=b\}$.

7) Demuestre que $\int_a^b \text{Sen}(x)dx = \text{Cos}(a) - \text{Cos}(b)$

Sugerencia:

Multiplicar por $\frac{\text{Sen}(h)}{\text{Sen}(h)}$ y aplicar $\text{Sen}(x)\text{Sen}(y) = \frac{1}{2}[\text{Cos}(x-y) - \text{Cos}(x+y)]$.

8) Demuestre que $\int_a^b \text{Cos}(x)dx = \text{Sen}(b) - \text{Sen}(a)$

Sugerencia:

Multiplicar por $\frac{\text{Sen}(h)}{\text{Sen}(h)}$ y aplicar $\text{Cos}(x)\text{Sen}(y) = \frac{1}{2}[\text{Sen}(x+y) - \text{Sen}(x-y)]$.

9) Demuestre que $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$

Sugerencia: Usar $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$

10) Demuestre que $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln(2)$

Sugerencia: Use la partición $P = \{ 1=q^0, q^1, q^2, q^3, \ldots, q^n=2 \}$.

11) Demuestre que $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{b} - 2\sqrt{a}$

Sugerencia: Use la partición $P = \{a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, aq^n=b\}$.

12) Exprese $\int_1^e \ln(x)dx$ como un límite de sumas de Riemann, dividiendo el intervalo [1,e] en n partes y tomando para las alturas de los rectángulos valores de la función $f(x)=\ln(x)$ para los cuales x es:

a) Extremo inferior de cada subintervalo.

b) Extremo superior de cada subintervalo.

c) Punto medio de cada subintervalo.

13) Una partícula se mueve a una velocidad de $v(t) = 2+0.5t^2$ m/seg para $0 \leq t \leq 8$ segundos.

a) Trace el gráfico de la función dada.

b) Use intervalos de tiempo de 2 segundos para estimar la distancia máxima y mínima recorrida por la partícula durante este tiempo, y luego calcule el promedio de las dos.

c) Use la definición de integral como límite de sumas de Riemann para determinar la distancia exacta recorrida por la partícula.

14) Use la definición de integral como límite de sumas de Riemann para hallar el área de la región limitada por las líneas $f(x) = x+1$ y $g(x) = (x-1)^2$. (Figura 8).

15) Use la definición de integral como límite de sumas de Riemann para determinar el área de la región limitada arriba por $f(x)=\text{Cos}(x)$ y abajo por $g(x)=\text{Sen}(x)$ en el intervalo $[0,\pi/4]$. (Figura 9).

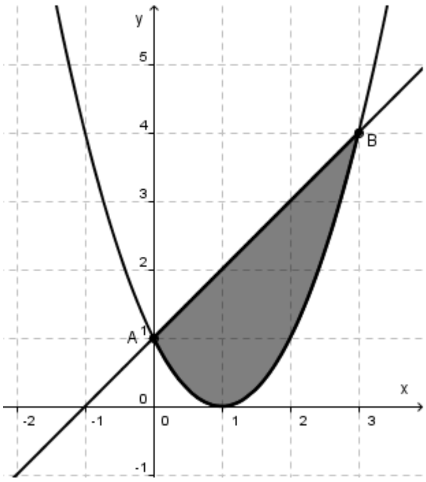


Figura 8.

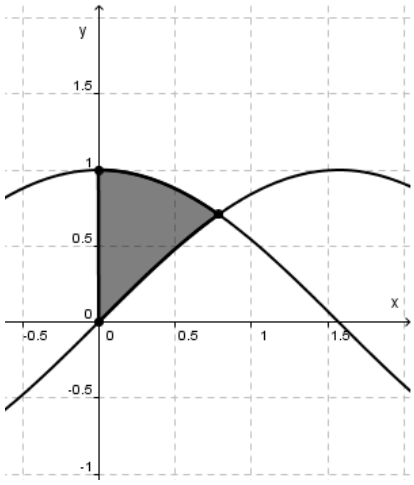


Figura 9.

3. Criterio de Riemann

Antes de enunciar el criterio de integrabilidad de Riemann, es conveniente familiarizarse con las siguientes definiciones y términos:

Definición: Se denomina $\mathscr{P}[a,b]$ la colección de particiones del intervalo [a,b]. Si f es acotada en [a,b] cada partición P de $\mathscr{P}[a,b]$ determina los números $\underline{S}(P,f)$ y $\overline{S}(P,f)$, y $\mathscr{P}[a,b]$ determina los conjuntos $\{\underline{S}(P,f) : P \in \mathscr{P}[a,b]\}$ y $\{\overline{S}(P,f) : P \in \mathscr{P}[a,b]\}$.

Definición: Si $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ y $Q=\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n\}$ son particiones de [a,b], se dice que Q es un refinamiento de P si todos los puntos de P pertenecen también a Q, es decir, si $P \subseteq Q$. En particular $P \cup Q$ es un refinamiento de P y Q.

Definición: Sea $f:[a,b] \to R$ acotada y $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ una partición de [a,b]. Entonces, para cada k=1,2,…,n se definen los valores m_k y M_k respectivamente como

$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ y $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$.

Si f es continua, $m_k = \min\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ y $M_k = \max\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$.

Definición: Sea $f:[a,b] \to R$ acotada y $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ una partición de [a,b], entonces, se definen la suma inferior y la suma superior para la función f con respecto a la partición P como:

Suma inferior: $\underline{S}(P,f) = \sum_{k=1}^{k=n} m_k (x_k - x_{k-1})$.

Suma superior: $\overline{S}(P,f) = \sum_{k=1}^{k=n} M_k (x_k - x_{k-1})$.

Algunas relaciones válidas entre las sumas inferior y superior son las siguientes:

- Si f es acotada en [a,b] y $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ una partición cualquiera de [a,b], entonces $\underline{S}(P,f) \le \overline{S}(P,f)$.
- Sea $f:[a,b] \to R$, $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ y $Q=\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n\}$ particiones de [a,b]. Entonces $\underline{S}(P,f) \le \overline{S}(Q,f)$.
- Sea $f:[a,b] \to R$, $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ y $Q=\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n\}$ particiones de [a,b]. Si Q es un refinamiento de P entonces $\underline{S}(P,f) \le \underline{S}(Q,f)$ y $\overline{S}(P,f) \ge \overline{S}(Q,f)$.

Definición:

Sea $f:[a,b] \to R$ y $\mathscr{P}[a,b]$ la colección de particiones del intervalo [a,b]. Entonces:

- La integral inferior de f se define como $\underline{S}(f) = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{\underline{S}(P,f) : P \in \mathscr{P}[a,b]\}$.
- La integral superior de f se define como $\overline{S}(f) = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{\overline{S}(P,f) : P \in \mathscr{P}[a,b]\}$.

Si $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$, entonces se cumplen las desigualdades:

- $m(b-a) \le \underline{S}(P,f) \le \overline{S}(P,f) \le M(b-a)$, para cualquier $P \in \mathscr{P}[a,b]$.
- $m(b-a) \le \underline{S}(f) \le \overline{S}(f) \le M(b-a)$

Definición: Sea f:[a,b]→R acotada. f es Riemann-integrable en [a,b] si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$, y su valor único se denomina integral definida de f sobre [a,b] y se simboliza $\int_a^b f(x)dx$.

Teorema de integrabilidad: Sea f:[a,b]→R una función acotada. f es integrable en [a,b], si y solo si, para todo $\in >0$ existe una partición P_ϵ tal que $\overline{S}(P_\in,f) - \underline{S}(P_\in,f) < \in$.

EJERCICIOS:

1) Use el criterio de integrabilidad de Riemann para demostrar que la función f(x)=mx es integrable en [0,1]. (m>0).
2) Use el criterio de integrabilidad de Riemann para demostrar que la función $f(x)=mx^2$ es integrable en [0,1]. (m>0).
3) Demuestre que la función $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$ no es integrable en el intervalo [0,1].
4) Demuestre que la función $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,1) \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$ es integrable en [0,1].
5) Demuestre que la función $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } x \in [1,2) \\ 2, & \text{si } x = 2 \end{cases}$ es integrable en [1,2].
6) Demuestre que la función f(x)=[x] satisface el criterio de integrabilidad de Riemann sobre cada subintervalo [k,k+1], k∈Z y que $\int_k^{k+1} [x]dx = k$.
7) Determine si la función $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \\ x, & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$ es integrable en el intervalo [0,1].
8) Determine si $f(x)=\begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1-x, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$ es integrable en el intervalo [0,1].
9) Sea $f(x)=\begin{cases} b-a, & \text{si } a \le x < b \\ b+a, & \text{si } x = b \end{cases}$ y $P_n = \left\{a + \frac{k}{n}(b-a) : k = 1,2,...,n\right\}$ una partición uniforme de [a,b].
   a) Hallar $\underline{S}(P_n,f)$ y $\overline{S}(P_n,f)$.
   b) Demuestre que f es integrable en el intervalo [a,b].

10) Grafique la función $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Use la interpretación geométrica de la integral para calcular $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

11) Sea $A=\{c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n\} \subset [a,b]$ y $f:[a,b] \to R$ acotada tal que $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{c_k}, & \text{si } x = c_k \\ 0, & \text{si } x \neq c_k \end{cases}$.

Demuestre que f es integrable en [a,b].

12) Determine si la función $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ es integrable en [0,2].

13) Determine si la función f(x) = Sen(x) es integrable en $[0,\pi/2]$.

14) Determine si la función f(x) = log(x) es integrable en [1,10].

15) Determine si la función $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$ es integrable en [-5,5].

16) Determine si la función f(x) = lxl - [x] es integrable en [-1,1].

17) Determine si $f(x) = \begin{cases} \text{Sen}(x), & \text{si } x \text{ es racional} \\ \text{Cos}(x), & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$ es integrable en el intervalo $[0,\pi/4]$.

18) Determine si la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x}{2}, & \text{si } x \in [0,2) \cap Q \\ \dfrac{x+2}{2}, & \text{si } x \in [2,4] - Q \end{cases}$ es integrable en [0,4].

19) Complete o detalle los pasos de la demostración de la siguiente proposición: Sea $f:[a,b] \to R$ acotada. Si f es integrable en [a,b], entonces, para todo $\in > 0$ existe una partición $P_\in$ tal que $\overline{S}(P_\in, f) - \underline{S}(P_\in, f) < \in$.

Se toma un $\in > 0$ y se definen dos particiones P_1 y P_2. $\underline{S}(f) - \underline{S}(P_1, f) < \in /2$; $\overline{S}(P_2, f) - \overline{S}(f) < \in /2$ Considérese la partición $P_\in = P_1 U P_2$. ¿Cómo es $P_\in$ con respecto a P_1 y P_2? $\underline{S}(f) - \frac{\in}{2} < \underline{S}(P_1, f) \leq \underline{S}(P_\in, f)$; $\overline{S}(P_\in, f) \leq \overline{S}(P_2, f) < \overline{S}(f) + \frac{\in}{2}$; Se concluye $\overline{S}(P_\in, f) - \underline{S}(P_\in, f) < \in$.

20) Complete o detalle los pasos de la demostración de la siguiente proposición: Si para todo $\in > 0$ existe una partición $P_\in$ tal que $\overline{S}(P_\in, f) - \underline{S}(P_\in, f) < \in$, entonces, f es integrable en [a,b].

Sea P cualquier partición de [a,b], entonces $\underline{S}(P, f) \leq \underline{S}(f)$, $\overline{S}(P, f) \geq \overline{S}(f)$ y $-\underline{S}(P, f) \geq -\underline{S}(f)$. De las desigualdades anteriores se obtiene $\overline{S}(f) - \underline{S}(f) \leq \overline{S}(P, f) - \underline{S}(P, f)$. Dado $\in > 0$, existe partición $P_\in$ talque $\in > \overline{S}(P_\in, f) - \underline{S}(P_\in, f) > \overline{S}(f) - \underline{S}(f)$. Se concluye que $\overline{S}(f) \leq \underline{S}(f)$ y que $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$.

4. Primer teorema fundamental

Este teorema fue desarrollado por Newton y Leibniz. Antes de enunciarlo es conveniente recordar el teorema del valor medio de Bolzano, el cual es útil para probar una versión para integrales del teorema del valor medio.

Teorema del valor medio de Bolzano: Sea $f:[a,b]\to R$ continua. Si $k\in R$ y $f(a)<k<f(b)$, entonces existe un punto x_0 en $[a,b]$ entre a y b tal que $f(x_0) = k$.

Teorema del valor medio para integrales: Sea $f:[a,b]\to R$ continua. Existe un x_0 en $[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)$.

Este teorema establece que el área de una región R representada por la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es igual al área de un rectángulo cuya base es el intervalo de integración $[a,b]$ y la altura es un número $f(x_0)$ para un x_0 que con absoluta seguridad se encontrará entre a y b. (Ver figura 10).

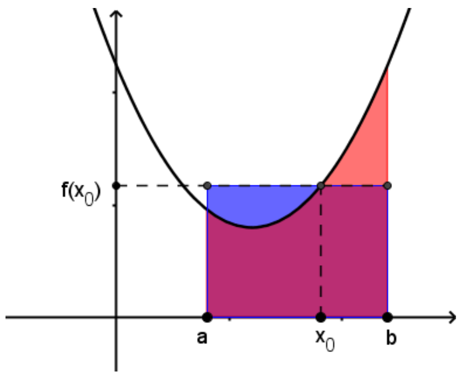


Figura 10.

El primer teorema fundamental del cálculo establece la conexión existente entre los procesos de derivación e integración, y se puede enunciar así:

Primer teorema fundamental del cálculo: Sea f una función integrable en $[a,b]$. Si $a \leq c \leq b$ y $F(x)$ es la función de áreas asociada a f definida como $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ para cada x en (a,b), entonces, existe la derivada $F'(x)$ en cada x de (a,b) en el que f es continua, y $F'(x) = f(x)$.

En la figura 11 se muestra el punto $(x,F(x))$, en donde la abscisa es un punto x del intervalo (a,b) y la ordenada es el área bajo la curva $y=f(x)$ en intervalo $[a,x]$. Para cada x se tiene $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ y se obtiene el punto $(x,F(x))$.

En la figura 12 se muestran los puntos $(x,F(x))$ para muchos x de (a,b) mostrando la tendencia de la función de áreas $y_1=F(x)$. El primer teorema fundamental del cálculo garantiza que la derivada de $y_1=F(x)$ es la función $y=f(x)$, y que la función de áreas (o integral) de $y=f(x)$ es la función $y_1=F(x)$.

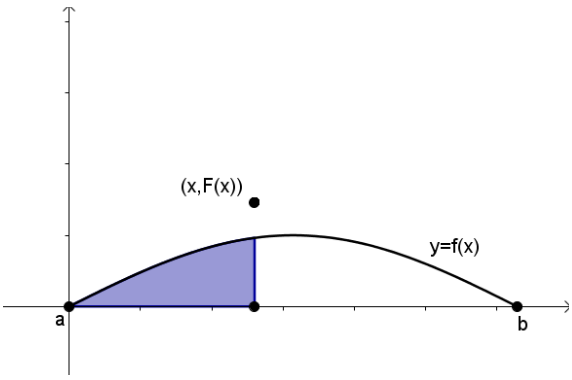


Figura 11.

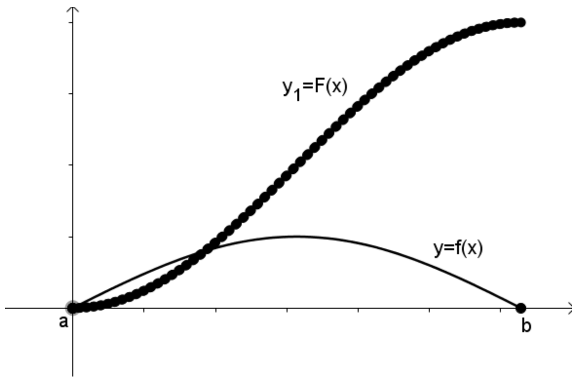


Figura 12.

EJERCICIOS:

1) Hallar $F'(x)$:

a) $F(x) = \int_0^{x^2} \mathrm{Cos}(t)dt$ b) $F(x) = \int_0^{x^2} \mathrm{Sen}(\sqrt{t})dt$

c) $F(x) = \int_0^{2x} \frac{\mathrm{Sen}(t)}{t}dt$ d) $F(x) = \int_x^{0} \sqrt{1+t^4}\,dt$

e) $F(x) = \int_0^{x} xf(t)dt$ f) $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{Cos}(t)dt$

g) $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{Cos}(t^2)dt$ h) $F(x) = \int_1^{\mathrm{Sen}(x)} 3t^2dt$

i) $F(x) = \int_0^{\mathrm{Tan}(x)} \mathrm{Sec}^2(y)dy$ j) $F(x) = \int_0^{\mathrm{Tan}(x)} \frac{dy}{1+y^2}$

k) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln(t)dt$ l) $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \mathrm{Cos}(t^2)dt$

m) $F(x) = \int_1^{\mathrm{Sen}(x)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; $|x| < \pi/2$ n) $F(x) = \int_2^{w(x)} \frac{du}{\log(u)}$, con $w(x) = \int_1^{x^2} \mathrm{Tan}(\sqrt{t})dt$

2) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \mathrm{Sen}(\sqrt{x})dx}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^{x} e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^{x} e^{2x^2}dx}$

3) Hallar la derivada de y respecto a x, de la función representada paramétricamente por $x(t) = \int_1^{t^3} \sqrt[3]{z}\ln(z)dz$; $y(t) = \int_{\sqrt{t}}^{3} z^2\ln(z)dz$. (t>0).

4) Hallar los puntos críticos de la función $F(x)=\int_0^x \frac{Sen(t)}{t}dt$. (x>0).

5) Hallar la derivada dy/dx de las siguientes funciones implícitas:

a) $\int_0^y e^{-t^2}dt+\int_0^{x^2} Sen^2(t)dt=0$ b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{3-2Sen^2(z)}\,dz+\int_0^y Cos(t)dt=0$

6) Hallar f(4), si $\int_0^x f(t)dt = xCos(x)$.

7) Encuentre una función continua f tal que $xf(x)=\int_0^x f(t)dt$, con f(0)=1 y x≠0.

8) Demostrar que $\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt\right]du$.

9) Hallar la recta tangente a la curva $f(x)=\int_{x^2}^{\sqrt{\pi}/2} Tan(t^2)dt$ cuando $x=\sqrt[4]{\pi/4}$.

10) Hallar los puntos de extremos y de inflexión del gráfico de la función $H(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2dt$.

11) Hallar los puntos en que la función $f(x)=\int_0^{x-1}\left(e^{-t^2}-e^{-2t}\right)dt$ alcanza su máximo y su mínimo absoluto en el intervalo $[1,\infty)$.

12) Sea f:[a,b]→R continua y f(x)≥0 para todo x∈[a,b]. Demuestre que: si $\underline{S}(f)=0$ entonces f(x)=0 para todo x∈[a,b].

13) Encuentre dos funciones f y g acotadas en [a,b], tales que $\underline{S}(f)+\underline{S}(g)<\underline{S}(f+g)$.

14) Sea f:[a,b]→R integrable. Demuestre que: Si f(x)≥0 para todo x∈[a,b], entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

15) Sean f:[a,b]→R y g:[a,b]→R integrables. Demuestre que: Si f(x)≤g(x) para todo x∈[a,b], entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

16) Sea f:[a,b]→R integrable. Demuestre que: Si m ≤ f(x) ≤ M para todo x∈[a,b], entonces $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

17) Sea f:[a,b]→R continua. Demuestre que: Si m ≤ f(x) ≤ M para todo x∈[a,b], entonces $m\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq M$.

18) Si $f:[a,b]\to R$ es monótona, demuestre que f es integrable en $[a,b]$.

19) Si $f:[a,b]\to R$ es continua, demuestre que f es integrable en $[a,b]$.

20) Sea $f:[a,b]\to R$ una función continua. Demuestre que existe un x_0 en $[a,b]$ tal que $f(x_0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. $f(x_0)$ es el valor medio de f en $[a,b]$.

21) Sea $f:[a,b]\to R$ una función continua y sea $g:[a,b]\to R$ integrable talque $g(x)\geq 0$ para todo x en $[a,b]$. Demuestre que existe un x_0 en $[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0)\int_a^b g(x)dx$.

22) Si $f:[a,b]\to R$ es integrable y existe $F(x)=\int_c^x f(t)dt$ tal que $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in[a,b]$, demuestre que $\frac{d}{dx}\left(\int_c^x f(t)dt\right)=f(x)$ para todo $x\in[a,b]$.

23) Encuentre los valores de A, B y C para los cuales se cumple la igualdad $\int\left(x^2-3x+5\right)e^{3x}dx = e^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right)+C_1$.

24) Encuentre los valores de A, B, C y D para los cuales se cumple la igualdad $\int e^x\left(Sen(2x)+Cos(3x)\right)dx = e^x\left(ASen(2x)+BCos(2x)+CSen(3x)+DCos(3x)\right)+C_1$.

25) Encuentre los valores de A, B, C, D, E y F para los cuales la primitiva de la función $f(x)=(3x^2-4x+2)Sen(5x)$ es $F(x)=(Ax^2+Bx+C)Sen(5x)+(Dx^2+Ex+F)Cos(5x)+C_1$.

5. Antiderivadas

Teorema: Si F y G son antiderivadas de una función f, entonces difieren en una constante.

Reglas de antiderivación inmediata: La integral indefinida de una función f es la familia de todas sus antiderivadas, la cual se representa como $\int f(x)dx = F(x) + C$.

A continuación se presenta una lista de reglas de "antiderivación o integración inmediata". Para deducir algunas de estas reglas se usa la definición $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

R1. $\int x^n dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, & \text{si } n \neq -1 \\ \ln(x) + C, & \text{si } n = -1 \end{cases}$

R2. $\int \mathrm{Sen}(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\mathrm{Cos}(ax) + C$

R3. $\int \mathrm{Cos}(ax)\, dx = \frac{1}{a}\mathrm{Sen}(ax) + C$

R4. $\int \mathrm{Tan}(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\mathrm{Cos}(ax)| + C = \frac{1}{a}\ln|\mathrm{Sec}(ax)| + C$

R5. $\int \mathrm{Ctg}(ax)\, dx = \frac{1}{a}\ln|\mathrm{Sen}(ax)| + C = -\frac{1}{a}\ln|\mathrm{Csc}(ax)| + C$

R6. $\int \mathrm{Sec}(ax)\, dx = \frac{1}{a}\ln|\mathrm{Sec}(ax) + \mathrm{Tan}(ax)| + C$

R7. $\int \mathrm{Csc}(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\mathrm{Csc}(ax) + \mathrm{Ctg}(ax)| + C$

R8. $\int \mathrm{Sec}^2(ax)\, dx = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}(ax) + C$

R9. $\int \mathrm{Csc}^2(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\mathrm{Ctg}(ax) + C$

R10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

R11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

R12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mathrm{ArcSen}\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\mathrm{ArcCos}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

R14. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{ArcTan}\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\frac{1}{a}\mathrm{ArcCtg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

R15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\mathrm{ArcSec}\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\frac{1}{a}\mathrm{ArcCsc}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Linealidad de la integral: La integral es una transformación lineal y por lo tanto satisface las dos condiciones de linealidad:

- $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, k es una constante.

Construcción geométrica de antiderivadas: Para construir geométricamente una antiderivada de una función se siguen los mismos criterios usados para construir la gráfica de la derivada a partir de la gráfica de la función ya que $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ y $F'(x)=f(x)$.

Entonces:

- Cuando f es positiva en un intervalo I, $F'>0$ y F es creciente en I.
- Cuando f es negativa en un intervalo I, $F'<0$ y F es decreciente en I.
- Cuando f es nula en un punto x=c, $F'(c)=0$ y F(x) tiene un extremo o un punto de inflexión en x=c.

Para conocer los cambios de curvatura de la función F y diferenciar máximos, mínimos y puntos de inflexión, se observa el signo de f', ya que $f'=F''$. Entonces:

- Si f es decreciente en un intervalo I entonces $f'<0$ y $F''<0$, por tanto F es cóncava hacia abajo en el intervalo I.
- Si f es creciente en un intervalo I entonces $f'>0$ y $F''>0$, por tanto F es cóncava hacia arriba en el intervalo I.
- Si f tiene un extremo en x=a, entonces $f'(a)=0$ o $F''(a)=0$, por lo tanto F tiene un punto de inflexión en x=a.
- Si $f(a)=F'(a)=0$ y $F''(a)<0$, entonces F tiene un máximo en x=a.
- Si $f(a)=F'(a)=0$ y $F''(a)>0$, entonces F tiene un mínimo en x=a.

EJERCICIOS:

Determine las siguientes integrales indefinidas:

1. $\int \frac{1-x^3}{1+x+x^2}dx$
2. $\int \frac{1-x}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx$
3. $\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}dx$
4. $\int \frac{9-10x+x^2}{3-4\sqrt{x}+x}dx$
5. $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$
6. $\int \frac{x^4}{x^2+4}dx$
7. $\int \frac{x}{4x^4+1}dx$
8. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$
9. $\int \frac{dx}{x^6+x}$
10. $\int \frac{dx}{x(x^n+1)}$
11. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$
12. $\int e^x\left(2^x-3^{-x}\right)^2 dx$
13. $\int \frac{Cos(2x)}{Sen^2(x)Cos^2(x)}dx$
14. $\int \frac{dx}{Sen^2(x)Cos^2(x)}$
15. $\int Sen(4x)Cos(6x)dx$
16. $\int Sen(5x)Sen(7x)dx$
17. $\int Cos(4x)Cos(8x)dx$
18. $\int [Sec(4x)Csc(4x)]^2 dx$
19. $\int Sen^4(4x)dx$
20. $\int Cos^4(8x)dx$
21. $\int Cos(2x)Cos(4x)Cos(6x)dx$
22. $\int Sen^5(x)Cos(x)dx$
23. $\int Cos^6(x)Sen(x)dx$
24. $\int Sen(3x)Sen(5x)Sen(7x)dx$

25. $\int \mathrm{Tan}^4(x)dx$

26. $\int \sqrt{1+\mathrm{Cos}(4x)}\,dx$

27. $\int \sqrt{1-\mathrm{Cos}(6x)}\,dx$

28. $\int \frac{1+\mathrm{Cos}(x)}{x+\mathrm{Sen}(x)}dx$

29. $\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}dx$

30. $\int \sqrt{\mathrm{Tan}\left(\frac{x}{2}\right)}\mathrm{Sec}^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

31. $\int \frac{\mathrm{Sec}^2(x)-\mathrm{Sen}(x)}{\mathrm{Tan}(x)+\mathrm{Cos}(x)}dx$

32. $\int \frac{\mathrm{Sen}(2x)}{1+\mathrm{Sen}^2(x)}dx$

33. $\int \frac{\mathrm{Sen}\left(\sqrt{2}x\right)}{1+\mathrm{Cos}^2\left(\sqrt{2}x\right)}dx$

34. $\int \frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}dx$

35. $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2x^2-b^2}}$

38. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-16}}$

39. $\int \frac{dx}{x\ln(x)}$

40. $\int \frac{\sqrt{3}\,dx}{x\ln(x)\ln\left(\ln(x)\right)}$

41. $\int \frac{\mathrm{Senh}(3x)}{\mathrm{Cosh}(3x)}dx$

42. $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$

43. $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

44. $\int \frac{x^2dx}{9x^6-25}$

45. $\int \frac{\mathrm{Sen}(4x)dx}{9-16\mathrm{Cos}^2(4x)}$

46. En la figura 13 se representa la función f en el intervalo [0,12]. Construir geométricamente la función F antiderivada de f en intervalo [0,12]. que satisface la condición F(0)=2.

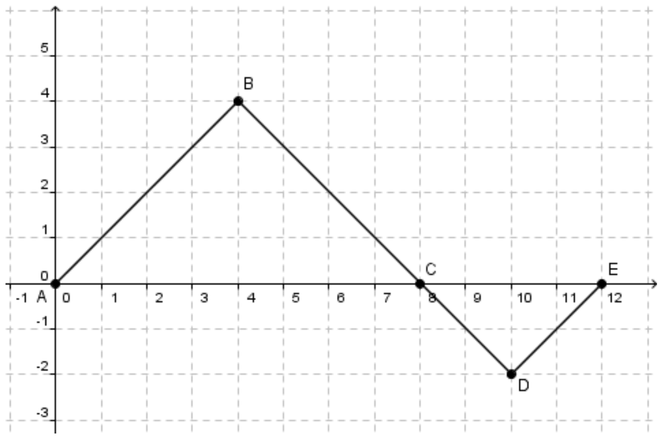


Figura 13.

47. En la figura 14 se representa la función f en el intervalo [-3,3]. Construir geométricamente la función F antiderivada de f en intervalo [-3,3], que satisface la condición F(0)=1.

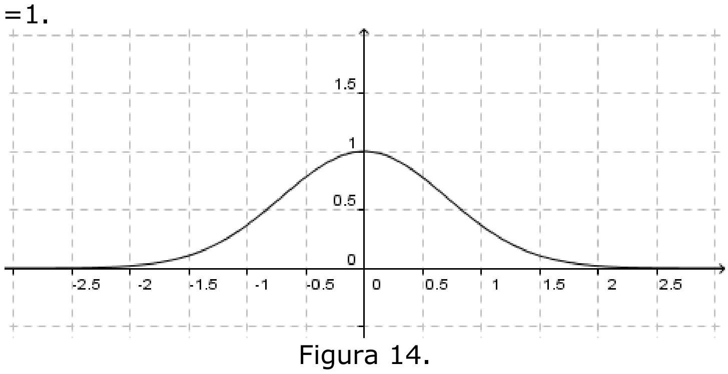


Figura 14.

48. En la figura 15 se representa la función f en el intervalo $[0,3\pi]$. Construir geométricamente la función F antiderivada de f en intervalo $[0,3\pi]$. que satisface la condición $F(\pi)=2$.

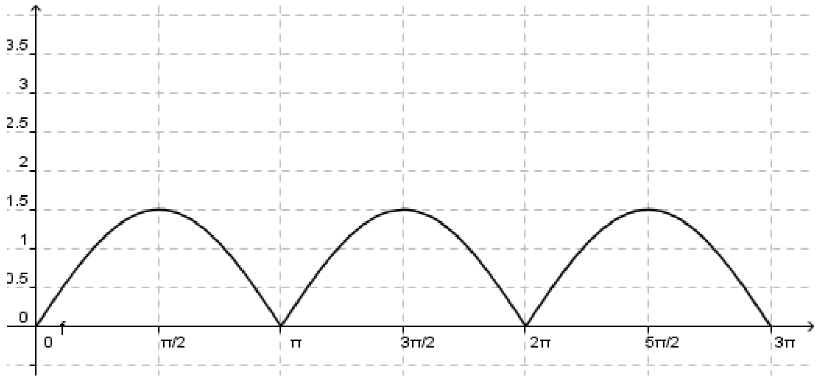


Figura 15.

49. En la figura 16 se representa la aceleración de un objeto desde t=1 min hasta t=14 min. Construir geométricamente la función de la velocidad del objeto en este intervalo de tiempo, si se sabe que velocidad es cero cuando t=14 min.

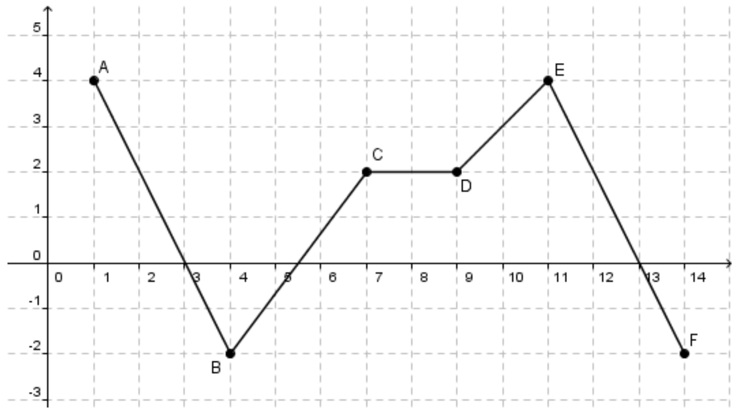


Figura 16.

50. En la figura 17a se muestra un sistema masa-resorte, en donde X_0 representa la posición de equilibrio de un bloque sujeto a un resorte, FR es la fuerza de recuperación, F es una fuerza externa que se aplica al bloque y f es la fuerza de fricción. La figura 17b es la gráfica de la función velocidad del bloque. Grafique la posición del bloque en función del tiempo desde el punto A hasta el punto E.

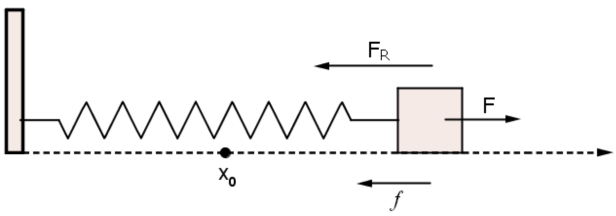


Figura 17a.

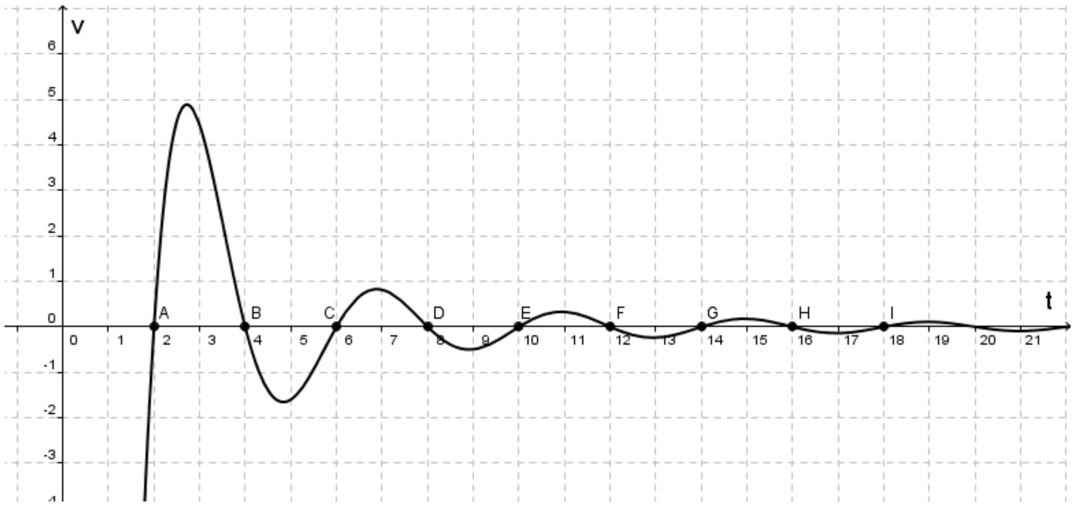


Figura 17b.

6. Segundo teorema fundamental

El segundo teorema fundamental del cálculo también se conoce como regla de Barrow o teorema fundamental de Cauchy. Una vía para la demostración de este teorema requiere el teorema del valor medio para derivadas o teorema de Lagrange, el cual se enuncia asi:

Teorema: Sea $f:[a,b]\to R$ continua y derivable en cada punto de (a,b). Existe un c en (a,b) tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Segundo teorema fundamental del cálculo: Sea f una función continua en el intervalo [a,b] y sea F(x) cualquier función primitiva de f, es decir F'(x) = f(x) para cada x en [a,b]. Entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

El segundo teorema fundamental establece que, independiente de la antiderivada F que se tome, el área bajo la curva f entre a y b, es F(b) − F(a). (Ver figuras 18a y 18b).

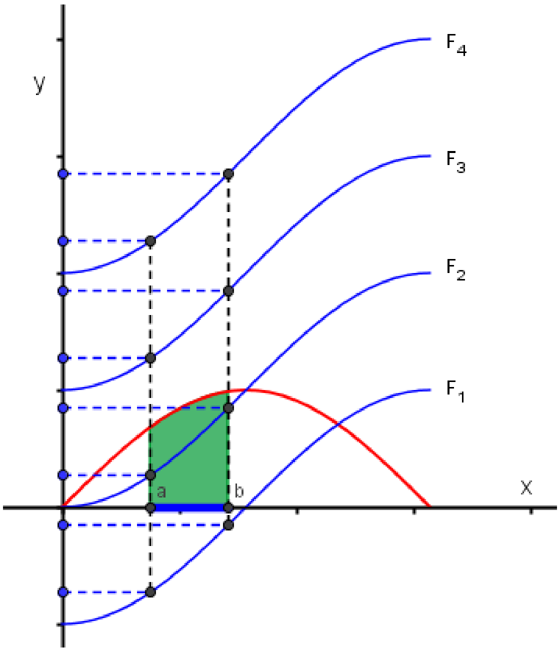


Figura 18a.

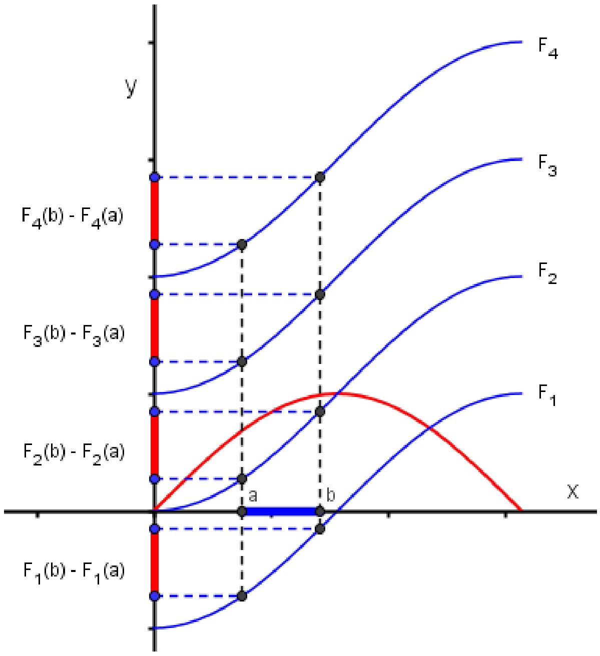


Figura 18b.

Los temas tratados hasta aquí permiten ver la siguiente diferencia entre la integral indefinida $\int_a^x f(t)dt = \int f(x)dx = F(x)+C$ y la integral definida $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$:

El resultado de una integral indefinida es una familia de funciones (F(x)+C) tales que (F(x)+C)´=f(x) ó F´(x)=f(x), mientras que el resultado de una integral definida es un número F(b)−F(a) que representa la medida del área de una región, pero más adelante se verá que este número puede representar un volumen, una longitud, una probabilidad, etc.

La integral definida satisface las siguientes propiedades, para f y g integrables en [a,b]:

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. (a<c<b).

2) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

3) $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ si $f(x)\le g(x)$ para cada $x\in[a,b]$.

4) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$.

6) $\int_{ac}^{bc} f(x)dx = c\int_a^b f(cx)dx$.

EJERCICIOS:

1) Calcule las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{Sen}(x)dx$

b) $\int_0^{2\pi} \text{Sen}^3(x)dx$

c) $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{x^2+a^2}$

d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)dx$, si $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}}\text{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)dx = 1$.

e) $\int_{-2}^{2} |x|\,dx$

f) $\int_{-2}^{2} \left|1 - x^2\right| dx$

g) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{Cos}^4(x)dx$

h) $\int_{-\pi}^{\pi} |\text{Sen}(x)|\,dx$

i) $\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1+\text{Sen}(x)}dx$

j) $\int_1^2 \frac{dx}{x\left(1+x^4\right)}$

k) $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left[\text{Sen}(2x)\text{Cos}(3x)\right]^4 dx$

l) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\text{Cos}(2x)\text{Cos}(4x)\text{Cos}(6x)\right]dx$

2) Encuentre el valor medio de f en el intervalo dado:

a) $f(x) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo [0,4].

b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en el intervalo [-1,1].

c) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ en el intervalo [0,3].

d) $f(x) = e^x$ en el intervalo [0,2].

e) $f(x) = \text{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ en el intervalo $[0,\pi]$.

f) $f(x)=2\text{Sen}(x)+3\text{Cos}(x)$ en el intervalo $[0,\pi/4]$.

3) Encuentre el valor x_0 que satisface el teorema del valor medio en las siguientes integrales:

a) $\int_1^4 \left(x^2 - 4x + 7\right)dx$ b) $\int_0^2 x|x|\,dx$

c) $\int_4^8 \left(2 + |x-4|\right)dx$ d) $\int_2^3 [x]\,dx$

e) $\int_0^{\pi} \text{Sen}(x)dx$ f) $\int_0^{\pi/4} \text{Sec}^2(x)dx$

4) El porcentaje de humedad dentro de un invernadero, durante las 12:00 y las 13:00 horas en que se estuvo inyectando vapor de agua al interior, se monitoreó continuamente, produciendo una función del tipo $f(x)=80x^2+10$, en donde $0 \le x \le 1$ (siendo x=0 a las 12:00 y x=1 a las 13:00 horas), y f(x) es el porcentaje de humedad en el ambiente. Determine el porcentaje medio de humedad que se tuvo en ese lapso de tiempo en el interior de invernadero. ¿En que hora se tiene el porcentaje medio de humedad?

5) La temperatura al interior de un refrigerador es de 5 grados centígrados. Un alimento que se saca del refrigerador se coloca en el fuego durante 10 minutos. Durante este lapso de tiempo la temperatura del alimento puede modelarse por la función $T(t) = 5 + \frac{t(t+1)}{2}$. Calcule la temperatura promedio que tuvo el alimento durante los 10 minutos en que se calentó. ¿A los cuántos minutos de iniciar el calentamiento so obtiene la temperatura promedio?

6) El crecimiento que tiene una población de bacterias en un cultivo, durante las primeras 5 horas, sigue el modelo de crecimiento exponencial $P(t)=1230e^t$ medido en horas. ¿Qué cantidad de bacterias hay en promedio en el cultivo durante las primeras 5 horas?

7) $F(x)=x(\ln^4(x)+A\ln^3(x)+B\ln^2(x)+C\ln(x)+D) + F$ es la forma de la antiderivada de la función $f(x)=\ln^4(x)$.
   a) Determine los coeficientes A, B, C y D.
   b) Calcule $\int_1^e \ln^4(x)dx$.

8) Las intersecciones entre las gráficas de $f(x)=4(x-1)(3-x)$ y $g(x) = \frac{x(4-x)}{2}$ determinan dos de los vértices del trapecio CABD. (Ver figura 19). Use integrales definidas para calcular el área del trapecio.

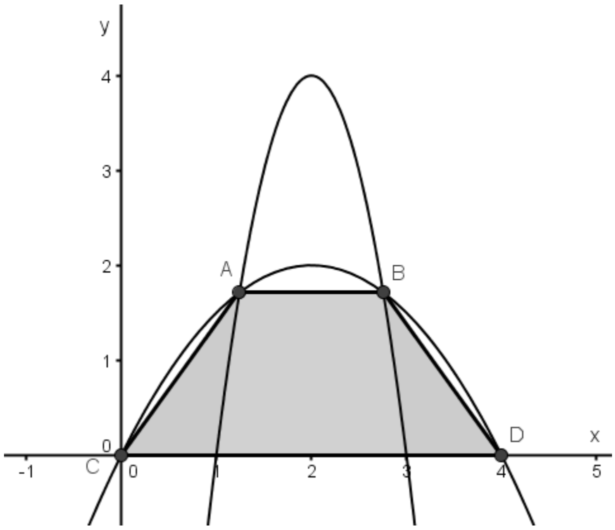


Figura 19.

9) Sea $f:[-a,a]\to R$ integrable. Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

10) Sea $f:[-a,a]\to R$ integrable. Si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Sugerencia: Usar $\int_{a}^{b} kf(kx)dx = \int_{ak}^{bk} f(x)dx$.

11) Demuestre que si $x\in[0,\pi/2]$ entonces se cumple la igualdad:

$$\int_{0}^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt + \int_{0}^{\mathrm{sen}^2 x} \mathrm{arc\,sen}\sqrt{t}dt = \frac{\pi}{4}.$$

12) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} ke^{-px}dx$.

13) Calcule $\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} [x]dx$.