CÁLCULO INTEGRAL
GUIA No 1

REPASO DE PRE-REQUISITOS

1. Factorización

Descomponer o factorizar un polinomio es expresarlo como producto de dos o más polinomios de grados menores. Se presentarán algunos tipos especiales de expresiones polinómicas y la forma de factorizarlos.

1.1 Factor común en los términos de un polinomio

Para factorizar un polinomio formado por la suma de varios términos, se revisa cada término y se busca una expresión que sea común divisor de los términos del polinomio. Esta expresión será un factor del polinomio, el otro factor se obtiene dividiendo cada término del polinomio por el común divisor hallado. Finalmente, el otro factor se forma con la suma de los cocientes hallados. En ocasiones es necesario realizar la factorización en dos pasos, como se ilustra en el ejemplo 2.

Ejemplo 1:
Factorizar $48x^3y^2 + 32x^4y^3 - 64x^2y^4$.

$48x^3y^2 + 32x^4y^3 - 64x^2y^4 = 16x^2y^2(3x + 2x^2y - 4y^2)$.

Ejemplo 2:
Factorizar $3bx^2 + abxy + 6xy + 9x + 2ay^2 + 3ay$.

$$\begin{aligned} 3bx^2 + abxy + 6xy + 9x + 2ay^2 + 3ay &= (3bx^2 + abxy) + (6xy + 2ay^2) + (9x + 3ay) \\ &= bx(3x + ay) + 2y(3x + ay) + 3(3x + ay) \\ &= (3x + ay)(bx + 2y + 3). \end{aligned}$$

1.2 Suma y diferencia de potencias iguales

a) Suma de potencias iguales de la forma $a^n + b^n$, con n impar.

De un cociente de la forma $\frac{a^n+b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}$, con n impar, resulta $a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$.

Ejemplo 3:
Factorizar $\frac{27}{8}a^3+\frac{64}{125}b^3$.

$$\frac{27}{8}a^3+\frac{64}{125}b^3=\left(\frac{3}{2}a\right)^3+\left(\frac{4}{5}b\right)^3 \quad =\left(\frac{3}{2}a+\frac{4}{5}b\right)\left(\left(\frac{3}{2}a\right)^2-\left(\frac{3}{2}a\right)\cdot\left(\frac{4}{5}b\right)+\left(\frac{4}{5}b\right)^2\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2}a+\frac{4}{5}b\right)\left(\frac{9}{4}a^2-\frac{12}{10}ab+\frac{16}{25}b^2\right).$$

Ejemplo 4:
Factorizar $32x^5 + 243y^{10}$.

$$32x^5 + 243y^{10} = (2x)^5 + (3y^2)^5$$
$$= (2x + 3y^2)\cdot((2x)^4 - (2x)^3(3y^2) + (2x)^2(3y^2)^2 - (2x)(3y^2)^3 + (3y^2)^4)$$
$$= (2x + 3y^2)\cdot(16x^4 - 24x^3y^2 + 36x^2y^4 - 54xy^6 + 81y^8).$$

Ejemplo 5:
Factorizar $(2a + b)^3 + (a - 2b)^3$

$$(2a + b)^3 + (a - 2b)^3 = [(2a + b) + (a - 2b)]\cdot[(2a + b)^2 - (2a + b)(a - 2b) + (a - 2b)^2]$$
$$= [3a - b]\cdot[(2a + b)^2 - (2a + b)(a - 2b) + (a - 2b)^2]$$
$$= (3a - b)(3a^2 + 3ab + 7b^2)$$

b) Diferencia de potencias iguales de la forma $a^n - b^n$, con n natural.

De un cociente de la forma $\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+...+ab^{n-2}+b^{n-1}$, resulta $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$.

De un cociente de la forma $\frac{a^n-b^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+...+ab^{n-2}-b^{n-1}$, con n par, resulta $a^n-b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+...+ab^{n-2}-b^{n-1}\right)$.

Ejemplo 6:
Factorizar $81x^4y^8 - 144m^6n^4$.

$$81x^4y^8 - 144m^6n^4 = (9x^2y^4)^2 - (12m^3n^2)^2 = (9x^2y^4 + 12m^3n^2)\cdot(9x^2y^4 - 12m^3n^2).$$

Ejemplo 7:
Factorizar $(1 - x)^5 - x^5$.

$$(1 - x)^5 - x^5 = [(1 - x) - x]\cdot[(1 - x)^4 + (1 - x)^3x + (1 - x)^2x^2 + (1 - x)x^3 + x^4]$$
$$= [1 - 2x]\cdot[(1 - x)^4 + (1 - x)^3x + (1 - x)^2x^2 + (1 - x)x^3 + x^4]$$
$$= (1 - 2x)\cdot(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1)$$

Ejemplo 8:

Factorizar $\frac{m^7}{128}-\frac{n^7}{2187}$.

$$\frac{m^7}{128}-\frac{n^7}{2187} = \left(\frac{m}{2}\right)^7-\left(\frac{n}{3}\right)^7 =$$

$$\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{3}\right)\left(\left(\frac{m}{2}\right)^6+\left(\frac{m}{2}\right)^5\left(\frac{n}{3}\right)+\left(\frac{m}{2}\right)^4\left(\frac{n}{3}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^3\left(\frac{n}{3}\right)^3+\left(\frac{m}{2}\right)^2\left(\frac{n}{3}\right)^4+\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{3}\right)^5+\left(\frac{n}{3}\right)^6\right).$$

Ejemplo 9:
Factorizar $(2x+1)^6 - x^6$.

$$(2x+1)^6 - x^6 =$$

$$=\left[(2x+1)-(x)\right]\left[(2x+1)^5+(2x+1)^4(x)+(2x+1)^3(x)^2+(2x+1)^2(x)^3+(2x+1)(x)^4+(x)^5\right]$$

$$=\left[x+1\right]\left[(2x+1)^5+(2x+1)^4x+(2x+1)^3x^2+(2x+1)^2x^3+(2x+1)x^4+x^5\right].$$

$= (x+1)(63x^5 + 129x^4 + 11x^3 + 49x^2 + 11x + 1)$

Ejemplo 10:
Factorizar $(a^2 + b^2)^2 - (a - b)^4$.

$$\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a-b\right)^4=\left(a^2+b^2\right)^2-\left[(a-b)^2\right]^2=\left(a^2+b^2+(a-b)^2\right)\cdot\left(a^2+b^2-(a-b)^2\right)=4ab(a^2-ab+b^2)$$

1.3 Factorización de trinomios

a) Trinomios de la forma $x^2 \pm 2xy + y^2$.

Un trinomio cuadrado perfecto $x^2 \pm 2xy + y^2$ resulta del producto $(x+y)(x+y) = (x+y)^2$ o $(x-y)(x-y) = (x-y)^2$.

Ejemplo 11:
Factorizar $9x^2+42x+49$.

$$9x^2+42x+49 = (3x+7)(3x+7) = (3x+7)^2.$$

Ejemplo 12:
Factorizar $9x^2y^4-24m^2nxy^2+16m^4n^2$.

$$9x^2y^4-24m^2nxy^2+16m^4n^2 = \left(3xy^2-4m^2n\right)\left(3xy^2-4m^2n\right) = \left(3xy^2-4m^2n\right)^2.$$

Ejemplo 13:
Factorizar $4x^2+12xy+16x+9y^2+24y+16$

$4x^2+12xy+16x+9y^2+24y+16 = \left(4x^2+12xy+9y^2\right)+(16x+24y)+16$

$= (2x+3y)^2+8(2x+3y)+16 = \left[(2x+3y)+4\right]\left[(2x+3y)+4\right]=(2x+3y+4)^2$

Ejemplo 14:
Factorizar $\frac{x}{9}-\frac{\sqrt{xy}}{3}+\frac{y}{4}$.

$\frac{x}{9}-\frac{\sqrt{xy}}{3}+\frac{y}{4} = \left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt{y}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2$.

b) Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.
Un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ resulta de un producto de la forma $(x+m)(x+n) = x^2 + (m+n)x + mn$, es decir, deben hallarse números m y n tales que $m+n=b$ y $mn=c$.

Ejemplo 15:
Factorizar $x^2 - x - 12$.

$x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4)$

Ejemplo 16:
Factorizar $x^2 + 10x + 21$.

$x^2 + 10x + 21 = (x+3)(x+7)$.

Ejemplo 17:
Factorizar $x^2 - 9x + 20$.

$x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5)$.

Ejemplo 18:
Factorizar $m + 6\sqrt{m} - 91$.

$m + 6\sqrt{m} - 91 = \left(\sqrt{m}+13\right)\left(\sqrt{m}-7\right)$.

c) Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a\neq1$.

Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, se multiplica y divide por el coeficiente a, quedando $ax^2+bx+c=\frac{a\left(ax^2+bx+c\right)}{a}=\frac{(ax)^2+b(ax)+ac}{a}$. Finalmente el numerador se factoriza como en el caso anterior.

Ejemplo 19:
Factorizar $6x^2 - 11x - 10$.

$$6x^2 - 11x - 10 = \frac{6\left(6x^2 - 11x - 10\right)}{6} = \frac{36x^2 - 11(6x) - 60}{6}$$
$$= \frac{(6x-15)(6x+4)}{6} = \frac{(6x-15)(6x+4)}{3 \bullet 2}$$
$$= \frac{3(2x-5)\bullet 2(3x+2)}{3 \bullet 2} = (2x-5)(3x+2).$$

Ejemplo 20:
Factorizar $8x^2 - 14xy - 15y^2$.

$$8x^2 - 14xy - 15y^2 = \frac{8\left(8x^2 - 14xy - 15y^2\right)}{8} = \frac{64x^2 - 14y(8x) - 120y^2}{8}$$
$$= \frac{(8x-20y)(8x+6y)}{4 \bullet 2} = \frac{4(2x-5y)\ 2(4x+3y)}{4 \bullet 2} = (2x-5y)\bullet(4x+3y).$$

Ejemplo 21:
Factorizar $10x^2 - 31xy + 15y^2$.

$$10x^2 - 31xy + 15y^2 = \frac{10\left(10x^2 - 31xy + 15y^2\right)}{10} = \frac{100x^2 - 31y(10x) + 150y^2}{10}$$
$$= \frac{(10x-25y)(10x-6y)}{5 \bullet 2} = \frac{5(2x-5y)\,2(5x-3y)}{5 \bullet 2}$$
$$= (2x-5y)(5x-3y).$$

1.4 Combinación de casos

a) Combinación de Trinomios y Binomios.

Ejemplo 22:
Factorizar $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 9n^2 + 24mn - 16m^2$.

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 9n^2 + 24mn - 16m^2 = (4x^2 + 12xy + 9y^2) - (9n^2 - 24mn + 16m^2)$$
$$= (2x + 3y)^2 - (3n - 4m)^2$$
$$= ((2x+3y)+(3n-4m))\cdot((2x+3y)-(3n-4m))$$
$$= (2x+3y+3n-4m)\cdot(2x+3y-3n+4m).$$

Ejemplo 23:
Factorizar $25y^2 - 9x^2y^2 + 9x^2 - 30xy$.

$$25y^2 - 9x^2y^2 + 9x^2 - 30xy = (25y^2 - 30xy + 9x^2) - 9x^2y^2$$
$$= (5y - 3x)^2 - 9x^2y^2$$
$$= (5y - 3x + 3xy)\cdot(5y - 3x - 3xy).$$

b) Completando cuadrados.

Ejemplo 24:
Factorizar $x^2 + 4x + 1$.

$x^2 + 4x + 1 = x^2 + 4x + 1 + (3 - 3) = x^2 + 4x + (1 + 3) - 3 = (x^2 + 4x + 4) - 3 =$
$(x + 2)^2 - 3 = (x + 2 + \sqrt{3})\cdot(x + 2 - \sqrt{3})$.

Ejemplo 25:

Factorizar $4x^4y^4 + x^2y^2 + 9$.

$$\begin{aligned} 4x^4y^4 + x^2y^2 + 9 &= 4x^4y^4 + x^2y^2 + 9 + 11x^2y^2 - 11x^2y^2 \\ &= (4x^4y^4 + 12x^2y^2 + 9) - 11x^2y^2 \\ &= (2x^2y^2 + 3)^2 - 11x^2y^2 \\ &= (2x^2y^2 + 3 + \sqrt{11}\,xy)\cdot(2x^2y^2 + 3 - \sqrt{11}\,xy). \end{aligned}$$

Ejemplo 26:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2y^2 &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 2x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2 + \sqrt{2}\,xy)\cdot(x^2 + y^2 - \sqrt{2}\,xy). \end{aligned}$$

Ejemplo 27:
Factorizar $x^5 + 1$.

$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$.

Ahora, se buscan dos polinomios de segundo grado $(x^2 + ax + 1)$ y $(x^2 + bx + 1)$ tales que $(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

Se desarrolla el producto:

$x^4 + (a + b)x^3 + (a\cdot b + 2)x^2 + (a + b)x + 1 = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

De igualar los polinomios resulta $a+b=-1$ y $ab+2=1$.

La solución del sistema es $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ y $b=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

Por lo tanto, $(x^5+1)=(x+1)\left(x^2+\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)x+1\right)\left(x^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)x+1\right)$.

c) Por sustitución de términos y agrupación.

Ejemplo 28:
Factorizar $x^3 + 7x - 8$.

Se sustituye (-8) por (-7 – 1), luego se hace una agrupación conveniente de los términos y finalmente se factorizan los términos agrupados.

$$x^3 + 7x - 8 = x^3 + 7x - 7 - 1 = (x^3-1) + (7x-7)$$
$$= (x-1)(x^2+x+1) + 7(x-1)$$
$$= (x-1)(x^2+x+1+7) = (x-1)(x^2+x+8).$$

Ejemplo 29:
Factorizar $4x^4 - 9x + 5$.

Se sustituye $(-9x)$ por $(-4x-5x)$, luego se hace una agrupación conveniente de los términos y finalmente se factorizan los términos agrupados.

$$4x^4 - 9x + 5 = 4x^4 - 4x - 5x + 5 = (4x^4 - 4x) - (5x - 5) = 4x(x^3 - 1) - 5(x - 1)$$
$$= 4x(x-1)(x^2+2x+1) - 5(x-1)$$
$$= (x-1)(4x(x^2+2x+1) - 5)$$
$$= (x-1)(4x^3 + 8x^2 + 4x - 5).$$

Ejemplo 30:
Factorizar $3x^5 - 10x^3 - 16$.

Se sustituye $(-10x^3)$ por $(-12x^3 + 2x^3)$, luego se hace una agrupación conveniente de los términos y finalmente se factorizan los términos agrupados.

$$3x^5 - 10x^3 - 16 = 3x^5 - 12x^3 + 2x^3 - 16 = (3x^5 - 12x^3) + (2x^3 - 16)$$
$$= 3x^3(x^2 - 4) + 2(x^3 - 8)$$
$$= 3x^3(x-2)(x+2) + 2(x-2)(x^2+2x+4)$$
$$=(x-2)(3x^3(x+2) + 2(x^2+2x+4))$$
$$= (x-2)(3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 4x + 8).$$

2. Racionalización

La **Racionalización** es el proceso de convertir una fracción cuyo denominador es una expresión irracional en términos de radicales en una fracción cuyo denominador sea racional, es decir, es eliminar las raíces del denominador de una fracción. Para racionalizar un denominador se multiplican el numerador y el denominador por una expresión radical adecuada que conduzca a la eliminación de las raíces del denominador.

2.1 Caso 1: Expresiones de la forma $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Para racionalizar una expresión de la forma $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$. En particular, si m=1, se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{a^{n-1}}$.

Ejemplo 1:

Si se quiere racionalizar $\frac{3}{\sqrt{5}}$, se debe multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{5}$ de la siguiente forma: $\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Ejemplo 2:

Si queremos racionalizar $\frac{5}{\sqrt[3]{7}}$, debemos multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{7^2}$ de la siguiente forma: $\frac{5}{\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^2}} = \frac{5\sqrt[3]{7^2}}{7} = \frac{5\sqrt[3]{49}}{7}$.

2.2 Caso 2: Expresiones de la forma $\frac{1}{\sqrt[2n]{a} - \sqrt[2n]{b}}$

Si el denominador de la fracción es la suma o resta de radicales en donde los índices radicales son iguales y pares, se debe multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo 3:

Racionalizar $\frac{4}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$

$$\frac{4}{\sqrt{8}-\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{8}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}}{\sqrt{8}+\sqrt{3}} = \frac{4\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{8}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{4\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{8-3} = \frac{4\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{5}$$

Ejemplo 4:

Racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\bullet\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\bullet\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\bullet\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Ejemplo 5:

Racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{2}}\bullet\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2-2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(5+2\sqrt{5}\sqrt{3}+3\right)-2}$$

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(5+2\sqrt{5}\sqrt{3}+3\right)-2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6+2\sqrt{15}}=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{6+2\sqrt{15}}\bullet\frac{6-2\sqrt{15}}{6-2\sqrt{15}}=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(6-2\sqrt{15}\right)}{-24}$$

En general, para racionalizar el denominador de una expresión de la forma $\dfrac{1}{a\pm b}$, en donde a y b son raíces con el mismo índice radical, se debe multiplicar el numerador y el denominador por el **factor racionalizante** que se señala en las siguientes reglas:

R1. $a^n-b^n=(a-b)\underbrace{\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)}_{\text{Factor Racionalizante}}$, n natural.

R2. $a^n+b^n=(a+b)\underbrace{\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right)}_{\text{Factor Racionalizante}}$, n natural impar.

Ejemplo 6:

Racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$

Se usa la regla $a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$, tomando $a=\sqrt[3]{5}$, $b=\sqrt[3]{2}$ y n = 3. Por lo tanto el factor racionalizante es $\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}$.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}\bullet\frac{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{5-2}=\frac{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{3}.$$

Ejemplo 7:

Racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{y}}$

Se usa la regla $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, tomando $a = \sqrt[5]{x}$, $b = \sqrt[5]{y}$ y n = 5.

Por lo tanto el Factor racionalizante es $\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{y^2} + \sqrt[5]{x}\sqrt[5]{y^3} + \sqrt[5]{y^4}$.

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{y}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{y}} \bullet \frac{\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{y^2} + \sqrt[5]{x}\sqrt[5]{y^3} + \sqrt[5]{y^4}}{\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{y^2} + \sqrt[5]{x}\sqrt[5]{y^3} + \sqrt[5]{y^4}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{y^2} + \sqrt[5]{x}\sqrt[5]{y^3} + \sqrt[5]{y^4}}{x - y}$$

Nota:

Para racionalizar expresiones de la forma $\frac{1}{\sqrt[m]{a} - \sqrt[n]{b}}$, con m≠n, se puede proceder de dos maneras:

a) Se homogenizan los índices y luego se aplican las reglas R1 o R2, o

b) Se racionaliza con respecto al índice m y luego se racionaliza con respecto al índice n.

Ejemplo 8:

Racionalizar $\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt{b}}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^2} - \sqrt[6]{b^3}} = \frac{\sqrt[6]{a^{10}} + \sqrt[6]{a^8b^3} + \sqrt[6]{a^6b^6} + \sqrt[6]{a^4b^9} + \sqrt[6]{a^2b^{12}} + \sqrt[6]{b^{15}}}{a^2 - b^3}$$

$$= \frac{a\sqrt[3]{a^2} + a\sqrt[3]{a}\sqrt{b} + ab + b\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b} + b^2\sqrt[3]{a} + b^2\sqrt{b}}{a^2 - b^3}$$

3. Propiedades de los logaritmos

La logaritmación es la operación inversa de la potenciación y consiste en calcular el exponente, conociendo la potencia y la base. La expresión $\log_b a = n$ se lee "el logaritmo de a en base b es igual a n". Si b>0, b≠1, a>0, entonces $\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a$.

En los logaritmos, las bases más usadas son 10 y e, para el logaritmo decimal y el logaritmo natural, respectivamente. Estos se simbolizan por log(a) y ln(a). Si a≠1, log(a)≠ln(a).

Las propiedades de los logaritmos son:

3.1 Propiedad 3: $\log_b(b) = 1$

3.2 Propiedad 4: $\log_b(1) = 0$

3.3 Propiedad 5: $\log_b(XY) = \log_b(X) + \log_b(Y)$

3.4 Propiedad 6: $\log_b\left(\frac{X}{Y}\right) = \log_b(X) - \log_b(Y)$

3.5 Propiedad 7: $\log_b\left(X^n\right) = n\log_b(X)$

3.6 Propiedad 9: $b^{\log_b(X)} = X$

3.7 Propiedad 10: $\log_y(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(y)}$.

Nota: Las siguientes igualdades no son propiedades válidas:

a) $\log_a(x+y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

b) $\log_a(x-y) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

c) $\log_a(xy) = \log_a(x)\log_a(y)$.

d) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(y)}$.

e) $\log_a\left(x^n\right) = \left(\log_a(x)\right)^n$

Ejemplo 1:

Encuentre los valores de x que satisfacen la ecuación $\log(x) = \frac{1}{2}\log(3) + \frac{2}{3}\log(5) - \frac{1}{3}\log(2)$.

$$\log(x) = \frac{1}{2}\log(3) + \frac{2}{3}\log(5) - \frac{1}{3}\log(2) = \log\left(3^{\frac{1}{2}}\right) + \log\left(5^{\frac{2}{3}}\right) - \log\left(2^{\frac{1}{3}}\right) = \log\left(\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}\right) \Rightarrow$$

$$x=\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}=\frac{(16875)^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}=\frac{(16875)^{\frac{1}{6}}2^{\frac{4}{6}}}{2}=\frac{\left(16875\cdot 2^{4}\right)^{\frac{1}{6}}}{2}=\frac{\sqrt[6]{270000}}{2}.$$

Ejemplo 2:

Encuentre los valores de x que satisfacen la ecuación $\log\left(\frac{2}{2x-1}\right)=\log(3)-\log(5+x)$.

$$\log\left(\frac{2}{2x-1}\right)=\log\left(\frac{3}{5+x}\right)\ \Rightarrow\ \frac{2}{2x-1}=\frac{3}{5+x}\ \Rightarrow\ 2(5+x)=3(2x-1)\ \Rightarrow$$

$$10+2x=6x-3\ \Rightarrow\ 4x=13\ \Rightarrow\ x=\frac{13}{4}.$$

Ejemplo 3:

Resolver la ecuación $\log_2\left(\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\right)\right)=3$.

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\right)=2^3\ \Rightarrow\ \log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\left(\sqrt{2}\right)^8\ \Rightarrow\ \log_{\frac{1}{2}}(x-1)=16\ \Rightarrow\ (x-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{16}\ \Rightarrow x-1=\frac{1}{65536}.$$

Entonces $x=1+\frac{1}{65.536}=\frac{65.537}{65.536}=1\frac{1}{65.536}$

Ejemplo 4:

Resolver la ecuación $\sqrt{\log(x)}=\log\sqrt{x}$

La ecuación tiene sentido para log x>0, $x\geq 1$.

Como $\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log(x)$, entonces $\sqrt{\log(x)}=\frac{1}{2}\log(x)$.

Elevando al cuadrado cada lado de la igualdad se tiene:

$$\log(x)=\frac{1}{4}\log^2(x)\ \Rightarrow\ 4\log(x)=\log^2(x)\ \Rightarrow\ \log^2(x)-4\log(x)=0\ \Rightarrow\ \log(x)\left(\log(x)-4\right)=0.$$

Por lo tanto: $\log(x)=0\ \Leftrightarrow\ x=1$ y $\log(x)=4\ \Leftrightarrow\ x=10^4$.

Entonces las soluciones son x=1, x=10000.

Ejemplo 5:

Se depositan \$800.000 en una cuenta a una tasa de interés compuesto del 5% mensual. Al cabo de cierto tiempo, al retirar el dinero con sus intereses, se reciben \$1´250.000. ¿A los cuántos meses se retiró el dinero?

Sean F=1´250.000 el valor futuro.
r= 5%=0.05 la tasa de interés mensual.
C=800.000 el capital depositado o valor presente.

Al sustituir estos valores en $F=C(1+r)^n$ se tiene:

$1´250.000 = 800.000(1+0.05)^n \Rightarrow (1.05)^n=\frac{1´250.000}{800.000}=\frac{25}{16}$.

Aplicando logaritmos a cada lado de la igualdad se tiene:

$$\log\left(\frac{25}{16}\right)=\log\left(1.05^n\right)\ \Rightarrow\ \log\left(\frac{25}{16}\right)=n\cdot\log(1.05)\ \Rightarrow\ n=\frac{\log\left(\frac{25}{16}\right)}{\log(1.05)}\approx 9.15\ \text{meses}.$$

4. Identidades trigonométricas

4.1 Relaciones fundamentales.

Las relaciones trigonométricas fundamentales son las siguientes:

1. Sen(A) Csc(A) = 1. 2. Cos(A) Sec(A) = 1. 3. Tan(A) Cot(A) = 1.

4. Tan(A) = $\frac{\text{Sen(A)}}{\text{Cos(A)}}$ .5. Cot(A) = $\frac{\text{Cos(A)}}{\text{Sen(A)}}$ .6. Sen(-A)=-Sen(A).

7. Cos(-A)=Cos(A).

4.2 Relaciones pitagóricas.

Las relaciones pitagóricas son las siguientes:

1. $\text{Sen}^2(A) + \text{Cos}^2(A) = 1$.
2. $\text{Tan}^2(A) + 1 = \text{Sec}^2(A)$.
3. $\text{Cot}^2(A) + 1 = \text{Csc}^2(A)$.

De cada una de estas identidades se obtienen dos nuevas identidades:

a) $\text{Sen}(A)=\sqrt{1-\text{Cos}^2(A)}$ b) $\text{Cos}(A)=\sqrt{1-\text{Sen}^2(A)}$

c) $\text{Tan}(A)=\sqrt{\text{Sec}^2(A)-1}$ d) $\text{Sec}(A)=\sqrt{1+\text{Tan}^2(A)}$

e) $\text{Cot}(A)=\sqrt{\text{Csc}^2(A)-1}$ f) $\text{Csc}(A)=\sqrt{1+\text{Cot}^2(A)}$

La importancia de estas relaciones radica en que permiten transformar una función en otra función y así facilitar la simplificación de expresiones complejas. A veces es conveniente usar factorización y racionalización. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1:

Simplificar $f(x)=\frac{\text{Cos}(x)(\text{Cos}(x)-\text{Sen}(x))}{1-2\text{Sen}(x)\text{Cos}(x)}$.

Solución:

Inicialmente se sustituye en el denominador el 1 por $\text{Sen}^2(x)+\text{Cos}^2(x)$.

$$\frac{\text{Cos}(x)(\text{Cos}(x)-\text{Sen}(x))}{1-2\text{Sen}(x)\text{Cos}(x)}=\frac{\text{Cos}(x)(\text{Cos}(x)-\text{Sen}(x))}{\text{Sen}^2(x)+\text{Cos}^2(x)-2\text{Sen}(x)\text{Cos}(x)}=\frac{\text{Cos}(x)(\text{Cos}(x)-\text{Sen}(x))}{\text{Cos}^2(x)-2\text{Sen}(x)\text{Cos}(x)+\text{Sen}^2(x)}$$

$$\frac{\text{Cos}(x)(\text{Cos}(x)-\text{Sen}(x))}{(\text{Cos}(x)-\text{Sen}(x))^2}=\frac{\text{Cos}(x)}{\text{Cos}(x)-\text{Sen}(x)}$$

Ejemplo 2:

Simplificar $\frac{\text{Cos}(x)\text{Cot}(x)-\text{Sen}(x)\text{Tan}(x)}{\text{Csc}(x)-\text{Sec}(x)}$.

Solución:

$$\frac{Cos(x)Cot(x)-Sen(x)Tan(x)}{Csc(x)-Sec(x)}=\frac{Cos(x)\frac{Cos(x)}{Sen(x)}-Sen(x)\frac{Sen(x)}{Cos(x)}}{\frac{1}{Sen(x)}-\frac{1}{Cos(x)}}=\frac{\frac{Cos^3(x)-Sen^3(x)}{Sen(x)Cos(x)}}{\frac{Cos(x)-Sen(x)}{Sen(x)Cos(x)}}$$

$$\frac{\frac{Cos^3(x)-Sen^3(x)}{Sen(x)Cos(x)}}{\frac{Cos(x)-Sen(x)}{Sen(x)Cos(x)}}=\frac{Cos^3(x)-Sen^3(x)}{Cos(x)-Sen(x)}=\frac{(Cos(x)-Sen(x))\left(Cos^2(x)+Sen(x)Cos(x)+Sen^2(x)\right)}{Cos(x)-Sen(x)}$$

$$Cos^2(x)+Sen(x)Cos(x)+Sen^2(x)=1+Sen(x)Cos(x)$$

Ejemplo 3:

Demostrar que $\frac{Cos(x)}{1-Sen(x)}=\frac{1+Sen(x)}{Cos(x)}$

Solución:

$$\frac{Cos(x)}{1-Sen(x)}=\frac{Cos(x)}{1-Sen(x)}\frac{Cos(x)}{Cos(x)}=\frac{Cos^2(x)}{(1-Sen(x))\,Cos(x)}=\frac{1-Sen^2(x)}{(1-Sen(x))\,Cos(x)}=$$

$$\frac{(1-Sen(x))\,(1+Sen(x))}{(1-Sen(x))\,Cos(x)}=\frac{1+Sen(x)}{Cos(x)}$$

Ejemplo 4:

Demostrar que $\frac{Cos^4(x)-Sen^4(x)}{1-Tan^4(x)}=Cos^4(x)$

Solución:

$$\frac{Cos^4(x)-Sen^4(x)}{1-Tan^4(x)}=\frac{\left(Cos^2(x)-Sen^2(x)\right)\left(Cos^2(x)+Sen^2(x)\right)}{\left(1-Tan^2(x)\right)\left(1+Tan^2(x)\right)}=\frac{\left(Cos^2(x)-Sen^2(x)\right)}{\left(1-\frac{Sen^2(x)}{Cos^2(x)}\right)Sec^2(x)}=$$

$$\frac{\left(Cos^2(x)-Sen^2(x)\right)}{\left(\frac{Cos^2(x)-Sen^2(x)}{Cos^2(x)}\right)Sec^2(x)}=\frac{\left(Cos^2(x)-Sen^2(x)\right)}{\left(Cos^2(x)-Sen^2(x)\right)Sec^2(x)Sec^2(x)}=\frac{1}{Sec^2(x)Sec^2(x)}=$$

$$\frac{1}{Sec^4(x)}=Cos^4(x)$$

Ejemplo 5:

Demostrar que $\frac{Sen(x)-Cos(x)+1}{Sen(x)+Cos(x)-1}=\frac{Sen(x)+1}{Cos(x)}$

Solución:

$$\frac{Sen(x)+1}{Cos(x)}=\frac{Sen(x)+1}{Cos(x)}\left(\frac{Sen(x)+Cos(x)-1}{Sen(x)+Cos(x)-1}\right)=\frac{Sen^2(x)+Sen(x)Cos(x)+Cos(x)-1}{Cos(x)(Sen(x)+Cos(x)-1)}=$$

$$\frac{Sen^2(x)+Sen(x)Cos(x)+Cos(x)-1}{Cos(x)(Sen(x)+Cos(x)-1)}=\frac{-\left(1-Sen^2(x)\right)+Sen(x)Cos(x)+Cos(x)}{Cos(x)(Sen(x)+Cos(x)-1)}=$$

$$\frac{-Cos^2(x)+Sen(x)Cos(x)+Cos(x)}{Cos(x)(Sen(x)+Cos(x)-1)}=\frac{Cos(x)(-Cos(x)+Sen(x)+1)}{Cos(x)(Sen(x)+Cos(x)-1)}=\frac{Sen(x)-Cos(x)+1}{Sen(x)+Cos(x)-1}$$

4.3 Funciones para una suma o una diferencia de ángulos.

Las funciones trigonométricas para una suma de ángulos son:

1. $Sen(A+B)=Sen(A)Cos(B)+Cos(A)Sen(B)$.
2. $Cos(A+B)=Cos(A)Cos(B)-Sen(A)Sen(B)$.
3. $Tan\left(A+B\right)=\dfrac{Tan(A)+Tan(B)}{1-Tan(A)Tan(B)}$.
4. $Cot\left(A+B\right)=\dfrac{Cot(A)Cot(B)-1}{Cot(A)+Cot(B)}$.
5. $Sec(A+B)=\dfrac{Sec(A)Sec(B)}{1-\sqrt{Sec^2(A)-1}\sqrt{Sec^2(B)-1}}$.
6. $Csc(A+B)=\dfrac{Csc(A)Csc(B)}{\sqrt{Csc^2(A)-1}+\sqrt{Csc^2(B)-1}}$.

Las funciones trigonométricas de una diferencia de ángulos son:

7. $Sen(A-B)=Sen(A)Cos(B)-Cos(A)Sen(B)$.
8. $Cos(A-B)=Cos(A)Cos(B)+Sen(A)Sen(B)$.
9. $Tan\left(A-B\right)=\dfrac{Tan(A)-Tan(B)}{1+Tan(A)Tan(B)}$.
10. $Cot\left(A-B\right)=\dfrac{Cot(A)Cot(B)+1}{Cot(B)-Cot(A)}$.
11. $Sec(A-B)=\dfrac{Sec(A)Sec(B)}{1+\sqrt{Sec^2(A)-1}\sqrt{Sec^2(B)-1}}$.
12. $Csc(A-B)=\dfrac{Csc(A)Csc(B)}{\sqrt{Csc^2(B)-1}-\sqrt{Csc^2(A)-1}}$.

Ejemplo 6:
Hallar Sen(75º).

Solución:

Sen(75º) = Sen(30º + 45º) = Sen(30º)Cos(45º) + Sen(45º)Cos(30º)

Sen(75º) = $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Ejemplo 7:
Hallar Cos(15º).

Solución:

Cos(15º) = Cos(45º - 30º) = Cos(45º)Cos(30º) + Sen(45º)Sen(30º)

Cos(15º) = $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Ejemplo 8:
Hallar Tan(105º).

Solución:

Tan(105º) = Tan(45º + 60º) = $\frac{\text{Tan}(45^{o})+\text{Tan}(60^{o})}{1-\text{Tan}(45^{o})\text{Tan}(60^{o})}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$.

Ejemplo 9:

Demostrar que $\text{Tan}\left(\frac{\pi}{4}-\text{A}\right)=\frac{1-\text{Tan(A)}}{1+\text{Tan(A)}}$.

Solución:

$$\text{Tan}\left(\frac{\pi}{4}-\text{A}\right)=\frac{\text{Tan}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\text{Tan(A)}}{1+\text{Tan}\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{Tan(A)}}=\frac{1-\text{Tan(A)}}{1+\text{Tan(A)}}.$$

Ejemplo 10:

Hallar Tan(2A), si $\text{Sen(A)}=\frac{1}{5}$ y 0<A<90º.

Solución:

Si $\text{Sen(A)}=\frac{1}{5}$, entonces Tan(A)=$\frac{\sqrt{6}}{12}$.

Tan(2A) = Tan(A+A) = $\frac{\text{Tan(A)}+\text{Tan(A)}}{1-\text{Tan(A)Tan(A)}}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right)}{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^{2}}=\frac{4\sqrt{6}}{23}$.

4.4 Funciones para ángulos múltiplos.

Utilizando las fórmulas del apartado 4.3 se pueden obtener fórmulas para Sen(2A), Cos(2A), Tan(2A), Sen(3A), Sen(4A), … etc.

Ejemplo 11.
Hallar una fórmula para Sen(2A).

Solución:
Sen(2A) = Sen(A+A) = Sen(A)Cos(A) + Sen(A)Cos(A) = 2Sen(A)Cos(A).

Ejemplo 12.
Hallar una fórmula para Cos(2A).

Solución:
$\mathrm{Cos}(2A) = \mathrm{Cos}(A+A) = \mathrm{Cos}(A)\mathrm{Cos}(A) - \mathrm{Sen}(A)\mathrm{Sen}(A) = \mathrm{Cos}^2(A) - \mathrm{Sen}^2(A)$.

Ejemplo 13.
Hallar una fórmula para Tan(2A).

Solución:
$\mathrm{Tan}(2A) = \mathrm{Tan}(A+A) = \dfrac{\mathrm{Tan}(A)+\mathrm{Tan}(A)}{1-\mathrm{Tan}(A)\mathrm{Tan}(A)} = \dfrac{2\mathrm{Tan}(A)}{1-\mathrm{Tan}^2(A)}$.

Ejemplo 14.
Hallar una fórmula para Sen(3A).

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sen}(3A) &= \mathrm{Sen}(A+2A) = \mathrm{Sen}(A)\mathrm{Cos}(2A) + \mathrm{Sen}(2A)\mathrm{Cos}(A) \\
&= \mathrm{Sen}(A)(\ \mathrm{Cos}^2(A) - \mathrm{Sen}^2(A)\ ) + 2\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Cos}(A)\mathrm{Cos}(A) \\
&= \mathrm{Sen}(A)\mathrm{Cos}^2(A) - \mathrm{Sen}^3(A) + 2\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Cos}^2(A) \\
&= 3\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Cos}^2(A) - \mathrm{Sen}^3(A).
\end{aligned}$$

Ejemplo 15.
Hallar una fórmula para Cos(3A).

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cos}(3A) &= \mathrm{Cos}(A+2A) = \mathrm{Cos}(A)\mathrm{Cos}(2A) - \mathrm{Sen}(A)\mathrm{Sen}(2A) \\
&= \mathrm{Cos}(A)(\ \mathrm{Cos}^2(A) - \mathrm{Sen}^2(A)\ ) - \mathrm{Sen}(A)(\ 2\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Cos}(A)\ ) \\
&= \mathrm{Cos}^3(A) - \mathrm{Cos}(A)\mathrm{Sen}^2(A) - 2\mathrm{Sen}^2(A)\mathrm{Cos}(A) \\
&= \mathrm{Cos}^3(A) - 3\mathrm{Cos}(A)\mathrm{Sen}^2(A).
\end{aligned}$$

4.5 Fórmulas para productos de Senos y Cosenos.

Sumando o restando las fórmulas para Sen(A+B), Sen(A–B), Cos(A+B) y Cos(A–B) se obtienen fórmulas para Sen(A)Sen(B), Sen(A)Cos(B) y Cos(A)Cos(B).

Estas fórmulas son muy útiles en el cálculo para resolver integrales de la forma $\int \mathrm{Sen}(mx)\mathrm{Cos}(nx)dx$, $\int \mathrm{Sen}(mx)\mathrm{Sen}(nx)dx$ y $\int \mathrm{Cos}(mx)\mathrm{Cos}(nx)dx$, siendo m≠n.

Sumando Sen(A+B) y Sen(A–B):

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Sen}(A+B)=\mathrm{Sen}(A)\mathrm{CoS}(B)+\mathrm{Sen}(B)\mathrm{Cos}(A)\\ \mathrm{Sen}(A-B)=\mathrm{Sen}(A)\mathrm{CoS}(B)-\mathrm{Sen}(B)\mathrm{Cos}(A)\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{Sen}(A+B)+\mathrm{Sen}(A-B)=2\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Cos}(B).$$

Entonces $\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Cos}(B)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Sen}(A+B)+\mathrm{Sen}(A-B)\right]$.

Restando Sen(A+B) y Sen(A–B):

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Sen}(A+B)=\mathrm{Sen}(A)\mathrm{CoS}(B)+\mathrm{Sen}(B)\mathrm{Cos}(A)\\ \mathrm{Sen}(A-B)=\mathrm{Sen}(A)\mathrm{CoS}(B)-\mathrm{Sen}(B)\mathrm{Cos}(A)\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{Sen}(A+B)-\mathrm{Sen}(A-B)=2\mathrm{Sen}(B)\mathrm{Cos}(A)$$

Entonces $\mathrm{Sen}(B)\mathrm{Cos}(A)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Sen}(A+B)-\mathrm{Sen}(A-B)\right]$.

Sumando Cos(A+B) y Cos(A–B):

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Cos}(A+B)=\mathrm{Cos}(A)\mathrm{CoS}(B)-\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Sen}(B)\\ \mathrm{Cos}(A-B)=\mathrm{Cos}(A)\mathrm{CoS}(B)+\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Sen}(B)\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{Cos}(A+B)+\mathrm{Cos}(A-B)=2\mathrm{Cos}(A)\mathrm{Cos}(B)$$

Entonces $\mathrm{Cos}(A)\mathrm{Cos}(B)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Cos}(A+B)+\mathrm{Cos}(A-B)\right]$.

Restando Cos(A+B) y Cos(A–B):

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Cos}(A+B)=\mathrm{Cos}(A)\mathrm{CoS}(B)-\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Sen}(B)\\ \mathrm{Cos}(A-B)=\mathrm{Cos}(A)\mathrm{CoS}(B)+\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Sen}(B)\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{Cos}(A+B)-\mathrm{Cos}(A-B)=-2\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Sen}(B)$$

Entonces $\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Sen}(B)=-\frac{1}{2}\left[\mathrm{Cos}(A+B)-\mathrm{Cos}(A-B)\right]$.

En resumen, las fórmulas para productos de Senos y Cosenos son:

1. $\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Cos}(B)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Sen}(A+B)+\mathrm{Sen}(A-B)\right]$
2. $\mathrm{Sen}(B)\mathrm{Cos}(A)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Sen}(A+B)-\mathrm{Sen}(A-B)\right]$
3. $\mathrm{Cos}(A)\mathrm{Cos}(B)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Cos}(A+B)+\mathrm{Cos}(A-B)\right]$
4. $\mathrm{Sen}(A)\mathrm{Sen}(B)=-\frac{1}{2}\left[\mathrm{Cos}(A+B)-\mathrm{Cos}(A-B)\right]$

Ejemplo 16:
Expresar Sen(5x)Cos(7x) como una suma o diferencia de Senos y Cosenos.

Solución:
$\text{Sen}(5x)\text{Cos}(7x) = \frac{1}{2}\left[\text{Sen}(5x+7x)+\text{Sen}(5x-7x)\right] = \frac{1}{2}\left[\text{Sen}(12x)-\text{Sen}(2x)\right]$.

Ejemplo 17:
Expresar como una suma o diferencia Sen(9x)Sen(7x).

Solución:
$\text{Sen}(9x)\text{Sen}(7x) = -\frac{1}{2}\left[\text{Cos}(9x+7x)-\text{Cos}(9x-7x)\right] = -\frac{1}{2}\left[\text{Cos}(16x)-\text{Cos}(2x)\right]$.

Ejemplo 18:
Expresar como una suma Cos(3x)Cos(7x).

Solución:
$\text{Cos}(3x)\text{Cos}(7x) = \frac{1}{2}\left[\text{Cos}(3x+7x)+\text{Cos}(3x-7x)\right] = \frac{1}{2}\left[\text{Cos}(10x)+\text{Cos}(4x)\right]$.

Ejemplo 19:
Demostrar que $\frac{\text{Cos}(4x)}{\text{Cos}(2x)}+\frac{\text{Sen}(4x)}{\text{Sen}(2x)}=\frac{2\text{Sen}(6x)}{\text{Sen}(4x)}$

Solución:
$$\frac{\text{Cos}(4x)}{\text{Cos}(2x)}+\frac{\text{Sen}(4x)}{\text{Sen}(2x)}=\frac{\text{Cos}(4x)\text{Sen}(2x)+\text{Cos}(2x)\text{Sen}(4x)}{\text{Cos}(2x)\text{Sen}(2x)}=\frac{\text{Sen}(4x+2x)}{\frac{\text{Sen}(4x)}{2}}=\frac{2\text{Sen}(6x)}{\text{Sen}(4x)}$$

Ejemplo 20:
Demostrar que $\frac{\text{Cos}(3x)}{\text{Sen}(x)}+\frac{\text{Sen}(3x)}{\text{Cos}(x)}=2\text{Cot}(2x)$

Solución:
$$\frac{\text{Cos}(3x)}{\text{Sen}(x)}+\frac{\text{Sen}(3x)}{\text{Cos}(x)}=\frac{\text{Cos}(3x)\text{Cos}(x)+\text{Sen}(x)\text{Sen}(3x)}{\text{Sen}(x)\text{Cos}(x)}=\frac{\text{Cos}(3x-x)}{\frac{\text{Sen}(2x)}{2}}=\frac{2\text{Cos}(2x)}{\text{Sen}(2x)}=2\text{Cot}(2x).$$

4.6 Fórmulas para sumas y diferencias de Senos y Cosenos.

Si hacemos A+B=X y A-B=Y en las fórmulas del apartado B5 se obtiene fórmulas para Sen(X)+Sen(Y), Sen(X)-Sen(Y), Cos(X)+Cos(Y) y Cos(X)-Cos(Y).

La solución del sistema de ecuaciones $\begin{bmatrix} A+B=X \\ A-B=Y \end{bmatrix}$ es $A=\frac{X+Y}{2}$ y $B=\frac{X-Y}{2}$. Sustituyendo estas nuevas expresiones en las fórmulas del B5 se obtienen las siguientes fórmulas:

$$\text{Sen}\left(\frac{X+Y}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{X-Y}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\text{Sen}(X)+\text{Sen}(Y)\right]\Rightarrow \text{Sen}(X)+\text{Sen}(Y)=2\text{Sen}\left(\frac{X+Y}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{X-Y}{2}\right)$$

$$\text{Sen}\left(\frac{X-Y}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{X+Y}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\text{Sen}(X)-\text{Sen}(Y)\right]\Rightarrow \text{Sen}(X)-\text{Sen}(Y)=2\text{Sen}\left(\frac{X-Y}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{X+Y}{2}\right)$$

$$\text{Cos}\left(\frac{X+Y}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{X-Y}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\text{Cos}(X)+\text{Cos}(Y)\right]\Rightarrow \text{Cos}(X)+\text{Cos}(Y)=2\text{Cos}\left(\frac{X+Y}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{X-Y}{2}\right)$$

$$\text{Sen}\left(\frac{X+Y}{2}\right)\text{Sen}\left(\frac{X-Y}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\text{Cos}(Y)-\text{Cos}(X)\right]\Rightarrow \text{Cos}(X)-\text{Cos}(Y)=-2\text{Sen}\left(\frac{X+Y}{2}\right)\text{Sen}\left(\frac{X-Y}{2}\right)$$

En resumen, las fórmulas para sumas y diferencias de Senos y Cosenos son:

1. $\text{Sen}(X)+\text{Sen}(Y)=2\text{Sen}\left(\frac{X+Y}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{X-Y}{2}\right)$.
2. $\text{Sen}(X)-\text{Sen}(Y)=2\text{Sen}\left(\frac{X-Y}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{X+Y}{2}\right)$.
3. $\text{Cos}(X)+\text{Cos}(Y)=2\text{Cos}\left(\frac{X+Y}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{X-Y}{2}\right)$.
4. $\text{Cos}(X)-\text{Cos}(Y)=-2\text{Sen}\left(\frac{X+Y}{2}\right)\text{Sen}\left(\frac{X-Y}{2}\right)$.

Ejemplo 21:
Expresar como un producto Sen(7x) – Sen(3x).

Solución:

$$\text{Sen}(7x)-\text{Sen}(3x)=2\text{Sen}\left(\frac{7x-3x}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{7x+3x}{2}\right)=2\text{Sen}(2x)\text{Cos}(5x).$$

Ejemplo 22:

Expresar como un producto $\text{Sen}\left(\frac{3x}{2}\right)+\text{Sen}\left(\frac{7x}{2}\right)$.

Solución:

$$\text{Sen}\left(\frac{3x}{2}\right)+\text{Sen}\left(\frac{7x}{2}\right)=2\text{Sen}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{7x}{2}+\frac{3x}{2}\right)\right]\text{Cos}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{3x}{2}\right)\right]=2\text{Sen}\left(\frac{5x}{2}\right)\text{Cos}(x).$$

Ejemplo 23:

Expresar como un producto $\text{Cos}\left(\frac{7x}{5}\right)+\text{Cos}\left(\frac{3x}{5}\right)$.

Solución:

$$\text{Cos}\left(\frac{7x}{5}\right)+\text{Cos}\left(\frac{3x}{5}\right)=2\text{Cos}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{7x}{5}+\frac{3x}{5}\right)\right]\text{Cos}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{7x}{5}-\frac{3x}{5}\right)\right]=2\text{Cos}(x)\text{Cos}\left(\frac{2x}{5}\right).$$

Ejemplo 24:

Expresar como un producto $\text{Cos}\left(\frac{7x}{3}\right)-\text{Cos}\left(\frac{x}{3}\right)$.

Solución:

$$\text{Cos}\left(\frac{7x}{3}\right)-\text{Cos}\left(\frac{x}{3}\right)=-2\text{Sen}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{7x}{3}+\frac{x}{3}\right)\right]\text{Sen}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{7x}{3}-\frac{x}{3}\right)\right]=-2\text{Sen}\left(\frac{4x}{3}\right)\text{Sen}(x).$$

Ejemplo 25:

Demostrar que $\frac{\text{Sen}(4x)+\text{Sen}(2x)}{\text{Cos}(4x)+\text{Cos}(2x)}=\text{Tan}(3x)$.

Solución:

$$\frac{\text{Sen}(4x)+\text{Sen}(2x)}{\text{Cos}(4x)+\text{Cos}(2x)}=\frac{2\text{Sen}\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{4x-2x}{2}\right)}{2\text{Cos}\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{4x-2x}{2}\right)}=\frac{\text{Sen}(3x)}{\text{Cos}(3x)}=\text{Tan}(3x)$$

5.1 Definiciones

Definición 1:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que, dado un $\varepsilon > 0$ existe un $K = K(f,\varepsilon) > 0$ tal que si x>K entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definición 2:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ significa que, dado un $P > 0$ existe un $M = M(f,P) > 0$ tal que si x>M entonces $f(x) > P$.

Definición 3:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ significa que, dado un $P < 0$ existe un $M = M(f,P) > 0$ tal que si x>M entonces $f(x) < P$.

Definición 4:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ significa que, dado un $P > 0$ existe un $M = M(f,P) < 0$ tal que si x<M entonces $f(x) > P$.

Definición 5:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ significa que, dado un $P < 0$ existe un $M = M(f,P) < 0$ tal que si x<M entonces $f(x) < P$.

5.2 Límites importantes:

1) Si $k \in R$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = \begin{cases} 0, & \text{si } k > 0 \\ \infty, & \text{si } k < 0 \end{cases}$

2) Sean $a \in R,\ b \in R,\ a \neq b$ y $x \in N$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{a^x + b^x} = \max\{a,b\}$.

3) Sean $F_{m/n}(x) = \sqrt[n]{P_m(x)}$ y $G_{k/q}(x) = \sqrt[q]{P_k(x)}$ dos funciones algebraicas definidas como $F_{m/n}(x) = \sqrt[n]{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$ y $G_{k/q}(x) = \sqrt[q]{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$, de grados m/n y k/q respectivamente. Entonces:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F_{m/n}(x)}{G_{k/q}(x)} = 0,$ si $\frac{k}{q} > \frac{m}{n}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F_{m/n}(x)}{G_{k/q}(x)} = \infty,$ si $\frac{k}{q} < \frac{m}{n}$.

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{F_{m/n}(x)}{G_{k/q}(x)} = \dfrac{\sqrt[n]{a_m}}{\sqrt[q]{b_k}}$, si $\dfrac{k}{q} = \dfrac{m}{n}$.

4) Si $a \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$.

5) Si $a \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$.

6) Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$.

5.3 Ejercicios:

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(1+2x)(1+4x)(1+6x)}{(3x-1)(5x-1)(7x-1)}$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x-3)^3 - 8x^3}{(2-3x)(3+2x)}$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x^2-3} - 5x\right)$

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{4x^2+9} - x\right)$

10) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3+1}\right)$

11) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right)$

11) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-1}\right)$

13) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

14) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3+ax^2} - \sqrt[3]{x^3-ax^2}\right)$

Calcular los siguientes límites:

1) $\text{Lím}_{x\to\infty} (1+3x)^{\frac{5}{3x}}$

2) $\text{Lím}_{x\to\infty} \left(1 - \sqrt{3}x\right)^{\frac{2}{x}}$

3) $\text{Lím}_{x\to 0} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^{x/2}$

4) $\text{Lím}_{x\to 0} \left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)^{x/a}$

5) $\text{Lím}_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x-5}{4x}\right)^{4x}$

6) $\text{Lím}_{x\to 0} \left(1 + \dfrac{3}{2x}\right)^{5x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Sen}(ax)-\text{Sen}(bx)}{a^x-b^x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)^{4x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\ln(1+x)}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3/2)^x-(2/3)^x}{x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3/2)^x-(2/3)^x}{\text{Sen}(4x)}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^x}{6^x-3^x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-3^x}{\text{Sen}(3x)}$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{Tan}(nx)}{2^x-1}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-4^x}{4x+5\text{Sen}(5x)}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(10+x)-\log(10)}{x}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(8+x)-\log(8)}{4x}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(10+x)-1}{3x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(10+x)-\log(10)}{5^x-3^x}$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e+x)-\ln(e)}{x}$

21) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2^x}{x-2}$

22) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3^x}{x-3}$

23) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^4-4^x}{x^2-16}$

24) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x+h}-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x}}{h}$

6. Derivadas

6.1 Teoremas sobre derivadas:

a) Si $k \in R$ y $f(x)=k \cdot u(x)$, entonces $f'(x)=k \cdot u'(x)$.

b) Si $f(x) = u(x) + v(x)$, entonces $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

c) Si $f(x) = u(x)v(x)$, entonces $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

d) Si $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, entonces $f'(x)=\dfrac{u'(x)\cdot v(X)-v'(x)\cdot u(x)}{v(x)^2}$.

e) Sean $g:[a,b]\to R$ y $f:[c,d]\to R$ funciones tales que $f([c,d]\subset[a,b]$ y sea $k\in[c,d]$. Si f es derivable en k y g es derivable en f(k), entonces la función compuesta $g\circ f$ es derivable en k, y $(g\circ f)'(k)=g'(f(k))f'(k)$.

f) Dadas dos funciones $F:R^2\to R$ y $f:R\to R$, la ecuación $F(x,y)=0$ define implícitamente la función $y=f(x)$ si $F(x,y)=0$ para todo x en el dominio de f. Si $y=f(x)$ es derivable entonces existe una expresión $G(x,y)$ talque $\dfrac{dy}{dx}=G(x,y)$.

6.2 Reglas de derivadas :

a) Si $f(x)=x^n$, entonces $f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lím}}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$.

b) Si $f(x)=\text{Sen}(x)$, entonces $f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lím}}\dfrac{\text{Sen}(x+h)-\text{Sen}(x)}{h}=\text{Cos}(x)$.

c) Si $f(x)=\text{Cos}(x)$, entonces $f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lím}}\dfrac{\text{Cos}(x+h)-\text{Cos}(x)}{h}=-\text{Sen}(x)$.

d) Si $f(x)=\text{Tan}(x)$, entonces $f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lím}}\dfrac{\text{Tan}(x+h)-\text{Tan}(x)}{h}=\text{Sec}^2(x)$.

e) Si $f(x)=\text{Cot}(x)$, entonces $f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lím}}\dfrac{\text{Cot}(x+h)-\text{Cot}(x)}{h}=-\text{Csc}^2(x)$.

f) Si $f(x)=\text{Sec}(x)$, entonces $f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lím}}\dfrac{\text{Sec}(x+h)-\text{Sec}(x)}{h}=\text{Sec}(x)\text{Tan}(x)$.

g) Si $f(x)=\text{Csc}(x)$, entonces $f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lím}}\dfrac{\text{Csc}(x+h)-\text{Csc}(x)}{h}=-\text{Csc}(x)\text{Cot}(x)$.

h) Si $f(x)=\log_a(x)$, entonces $f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lím}}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h}=\dfrac{1}{x}\log_a(e)$.

i) Si $f(x)=a^x$, entonces $f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lím}}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\ln(a)$.

j) Si $y = Sen^{-1}(x) \rightarrow x = Sen(y) \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

k) Si $y = Cos^{-1}(x) \rightarrow x = Cos(y) \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

l) Si $y = Tan^{-1}(x) \rightarrow x = Tan(y) \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

m) Si $y = Cot^{-1}(x) \rightarrow x = Cot(y) \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

n) $y = Sec^{-1}(x) \rightarrow x = Sec(y) \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

o) $y = Sec^{-1}(x) \rightarrow x = Sec(y) \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

6.3 Ejercicios:

1) Use las reglas de derivación que correspondan para obtener la derivada de las siguientes funciones algebraicas:

a) $f(x) = \dfrac{(a+x)^m}{(a-x)^n}$

b) $f(x) = \dfrac{(1+x^m)^n}{(1-x^n)^m}$

c) $f(x) = \left(\dfrac{1+x+x^2}{1-x-x^2}\right)^{20}$

d) $f(x) = \left(a+\left(a+\left(a+x^5\right)^5\right)^5\right)^5$

e) $f(x) = \dfrac{(1+x^m)^n}{\sqrt[m]{1-x^n}}$

f) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{a-x}{a+x}}$

g) $f(x) = \sqrt[5]{\left(\dfrac{ax-b}{ax+b}\right)^3}$

h) $f(x) = \left(\dfrac{bx+a}{bx+a}\right)^3 \sqrt[3]{\left(\dfrac{ax-b}{ax+b}\right)}$

i) $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{\sqrt[4]{ax^2-bx-c}}$

j) $f(x) = \sqrt[n]{\dfrac{a}{x}+\sqrt[n]{\dfrac{a}{x}+\sqrt[n]{\dfrac{a+x}{x}}}}$

2) Use las reglas de derivación que correspondan para obtener la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $f(x) = \dfrac{Sen(ax)+Sen(bx)}{Cos(ax)-Cos(bx)}$

b) $f(x) = \dfrac{Sec^n(ax)+Csc^n(bx)}{Sec(bx)+Csc(ax)}$

f) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{a-Sen(ax)}{a+Sen(ax)}}$

g) $f(x) = \sqrt[m]{\left(\dfrac{Cos(ax-b)}{Sen(ax+b)}\right)^n}$

c) $f(x)=\left(\dfrac{Tan(ax)+Cot(bx)}{Tan(bx)+Cot(ax)}\right)^{n}$

h) $f(x)=\left(\dfrac{Tan(bx)+ax}{Cot(bx)-ax}\right)^{m}$

d) $f(x)=\left(Sen(x)+\left(Cos(x)+\left(Tan(x)\right)^{n}\right)^{n}\right)^{n}$

i) $f(x)=\dfrac{Sen\left(\sqrt{ax}\right)}{\sqrt{ax+Cos\left(\sqrt{ax}\right)}}$

e) $f(x)=\dfrac{\left(1+Tan(x)\right)^{n}}{\sqrt[m]{1-Tan^{n}(x)}}$

j) $f(x)=\sqrt[n]{\dfrac{Sec(x)}{x}+\sqrt[n]{\dfrac{Sec(x)}{x}}}$

3) Use las reglas de derivación que correspondan para obtener la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $f(x)=x^{2}ArcSen(x^{2})$

b) $f(x)=\sqrt[n]{ArcSec(x^{2})}$

c) $f(x)=\dfrac{Sen(x)}{ArcCos(x^{2})}$

d) $f(x)=Csc(x^{2})ArcCsc(x^{2})$

e) $f(x)=\dfrac{ArcTan\left(\dfrac{x}{2}\right)}{ArcC\,\text{tg}\left(\dfrac{2}{x}\right)}$

f) $f(x)=\dfrac{ArcSec\left(\dfrac{a}{b}x\right)}{ArcCsc\left(\dfrac{b}{a}x\right)}$

g) $f(x)=\dfrac{Sec(x)+Csc(x)}{ArcSec(x^{2})}$

h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{ArcCsc(x^{n})}{ArcSen(x^{m})}}$

i) $f(x)=\sqrt{x}ArcSec(\sqrt{x})$

j) $f(x)=x^{2}ArcSec\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4) Use las reglas de derivación que correspondan para obtener la derivada de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $f(x)=\log_{3}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)$

b) $f(x)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x^{2}}{1-x^{2}}}\right)$

c) $f(x)=x^{n}\sqrt[n]{lon(x^{n})}$

d) $f(x)=\log_{2}\left(\log_{3}\left(\log_{4}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right)\right)$

e) $f(x)=\sqrt{\log(x)+\sqrt{\log(x)+\sqrt{\log(x)}}}$

f) $f(x)=\dfrac{\log_{2}(x)+\log_{4}(x)}{\log_{2}(x)-\log_{4}(x)}$

g) $f(x)=\sqrt{\log_{8}(x^{2})+\sqrt{\log_{4}(x^{4})+\sqrt{\log_{2}(x^{8})}}}$

h) $f(x)=\sqrt[16]{\dfrac{\log_{2}(x)\cdot\log_{4}(x)}{\log_{8}(x)\cdot\log_{16}(x)}}$

5) Use las reglas de derivación que correspondan para obtener la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{Sen(x)}{x}}}{3^{\frac{Cos(x)}{x}}}$ b) $f(x)=2^{Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)}$ c) $f(x)=\sqrt[3]{x}^{\sqrt[4]{x}^{\sqrt[5]{x}^{\sqrt[6]{x}}}}$

d) $f(x)=e^{e^{e^{e^{x}}}}$ e) $f(x)=\dfrac{x^{Sen(x)}}{\left(Cos(x)\right)^{x}}$ f) $f(x)=(x+x^2)^{(x+x^2)^{(x+x^2)}}$

6) Use las reglas de derivación que correspondan para obtener $\frac{dy}{dx}$ en las expresiones de la forma F(x,y)=0, en donde y=f(x) está implícita:

a) $\left(x^2+y^2\right)^2 = \mathrm{Sen}(x^2-y^2)$ b) $\log\left(\dfrac{x}{x+y}\right) = x^2+xy+y^2$

c) $x^y = y^x$ d) $\sqrt{x+\mathrm{Sen}(x)} = y-\mathrm{Cos}(y)$

e) $e^{(x+y)} = \dfrac{e^x+e^{-y}}{e^x-e^{-y}}$ f) $\dfrac{x}{y} - xy = \sqrt[n]{x+y}$

6.4 Análisis de una función:

Definición : Decimos que x=a es un **punto crítico** de una función f(x), si f´(a) = 0 ó f´(a) no está definido.

Definición: Decimos que una función f(x) es **creciente** en un intervalo (a,b), si f´(x)>0 para todo x∈(a,b).

Definición: Decimos que una función f(x) es **decreciente** en un intervalo (a,b), si f´(x)<0 para todo x∈(a,b).

Definición: Decimos que en x=a habrá un **punto de inflexión** de la función f(x), si f´´(a) = 0. El punto de inflexión será (a, f(a)).

Definición: Decimos que una función f(x) es **cóncava hacia abajo** en un intervalo (a,b), si f´´(x)<0 para todo x∈(a,b).

Definición: Decimos que una función f(x) es **cóncava hacia arriba** en un intervalo (a,b), si f´´(x)>0 para todo x∈(a,b).

Definición: En una función f(x) el punto crítico x=a representa un máximo, un mínimo, un cambio de concavidad o un punto de discontinuidad.

Definición: En el punto crítico x=a habrá un máximo de la función f(x), si f´´(a)<0. El máximo será el punto (a, f(a)).

Definición: En el punto crítico x=a habrá un mínimo de la función f(x), si f´´(a)>0. El mínimo será el punto (a, f(a)).

7) Halle los puntos críticos, máximos, mínimos, puntos de inflexión, intervalos de monotonía, intervalos de concavidad y gráfica de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^3 - 9x$

(b) $f(x) = x^3 - 9x^2$

(c) $f(x) = (3x^2 - x^3)^2$

(d) $f(x) = Sen2x + 3Cos2x$

(e) $f(x) = x + x^{1/3}$

(f) $f(x) = (1 - x^2)^2$

(g) $f(x) = (x^2 - 9x)^2$

(h) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 100.$

(i) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$

(j) $f(x) = x^3 - 3x - 4.$

(k) $f(x) = e^{-4x^2}$

(l) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(m) $f(x) = Sen(x) + Cos(2x)$

(n) $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$

(o) $f(x) = x - \ln(1+x)$

(p) $f(x) = x^2e^{-x}$

(q) $f(x) = x^3 - 12x.$

(r) $f(x) = (x^2 - 10x)^2.$

(s) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1.$

(t) $f(x) = x - 2Sen^2(x)$

Definición: Un sistema de ecuaciones lineales está formado por un conjunto de ecuaciones lineales $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$, donde $i = 1, 2, \ldots, m$. La forma general de escribir un sistema de ecuaciones lineales es la siguiente:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\quad \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

En forma abreviada es **Ax = b**, donde **A** es la matriz de coeficientes, **x** es el vector de las incógnitas y **b** es el vector de los valores independientes.

Un sistema de ecuaciones es **homogéneo** si $bj = 0$, para cada $j = 1, 2, \ldots m$; y es **No homogéneo** si al menos uno de los bj es diferente de cero.

Tipos de Solución: Un sistema puede ser consistente o inconsistente. Es **consistente** cuando tiene solución (única o infinitas). Es i**nconsistente** cuando no tiene solución.

Un sistema de ecuaciones homogéneo siempre tendrá solución: Única, cuando después de aplicar eliminación Gaussiana el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, esta es la solución trivial (0, 0, 0, . . . , 0); Infinitas, cuando después de aplicar eliminación Gaussiana el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas. Un sistema de ecuaciones no homogéneo puede ser consistente o inconsistente.

Método de Gauss-Jordan: Si en un sistema de ecuaciones Ax=b se realizan las siguientes operaciones, se obtiene un sistema equivalente, es decir, un sistema con las mismas soluciones:

1. Multiplicar una ecuación por un escalar k diferente de cero. $\{kE_m \rightarrow \text{modifica}(E_m)\}$.
2. Intercambiar dos ecuaciones. $\{E_m \rightarrow E_n$ y $E_n \rightarrow E_m\}$.
3. Sumar a una ecuación, k veces otra ecuación. $\{kE_m + E_n \rightarrow \text{modifica}(E_n)\}$.

Ejercicio 1:
Represente geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(a) $\begin{array}{l} 2x - y = 6 \\ 4x - 2y = 0 \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} -x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = -8 \end{array}$ (c) $\begin{array}{l} 4x + 3y = 12 \\ 3x - 4y = 12 \end{array}$

Ejercicio 2:
Represente geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

(a) $\begin{array}{l} x + 3y + 2z = 6 \\ 2x - 2y - 3z = 6 \\ 4x + 3y + z = 12 \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} 2x - y + 4z = 8 \\ 3x + 2y - 3z = 6 \\ 2x + y + 5z = 10 \end{array}$ (c) $\begin{array}{l} -x + 3y + 2z = -6 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{array}$

Ejercicio 3:
Use los métodos de eliminación, sustitución e igualación para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

(a) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 6 \\ 4x - 2y &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} -x + 2y &= 4 \\ 2x - 4y &= -8 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 4x + 3y &= 12 \\ 3x - 2y &= 12 \end{aligned}$

Ejercicio 4:
Use los métodos de eliminación, sustitución e igualación para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

(a) $\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 6 \\ 2x - 2y - 3z &= -6 \\ 4x + 3y + z &= 12 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x - y + 4z &= 8 \\ 3x + 2y - 3z &= 12 \\ 5x + y + 5z &= 10 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= -6 \\ 2x + y + 3z &= 6 \\ 2x + 4y + 5z &= 0 \end{aligned}$

Ejercicio 5:
Determine si los siguientes sistemas tienen o no solución única :

(a) $\begin{aligned} 4x + 3y + 3z &= 0 \\ 2x - 2y - 3z &= 0 \\ 4x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 10 \\ 3x + 3z &= 6 \\ 3y + 5z &= 10 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} -3x + 3y + 2z &= 6 \\ 2x + y + 3z &= 10 \\ x - 4y - 5z &= 0 \end{aligned}$

Ejercicio 6:
Explique geométrica y analíticamente, cuando el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$, tendrá:
(a) Solución única.
(b) Infinitas soluciones.
(c) Ninguna solución.

Ejercicio 7:
¿Qué condiciones deben cumplir las constantes a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22}, para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$, tenga:
(a) Solución única.
(b) Infinitas soluciones.

Ejercicio 8:
Use el método de Gauss-Jordan para resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 2x + z - 2u = 12 \\ 2y + z - 3u = -8 \\ 3x + 3y + u = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5y - u = 12 \\ 2y - z + 2u = 10 \\ x + 3y + 4z = -10 \\ 2x - z + 3u = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x - z - u + v = 2 \\ y + z + u + w = 0 \\ y - u - v - w = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - y + 2u = 6 \\ 3x - z - 3u = 2 \\ 5y + 6z - 2u = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 2y + z + u = 0 \\ 2x - y + z - u = 2 \\ 3x + y - z + u = 4 \\ 4x + 3y + 2u = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 4x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$

Ejercicio 9:
Determinar en los siguientes sistemas con las incógnitas x, y, z, el valor de **m** para que tenga :
(I) Solución única (II) Infinitas soluciones (III) Ninguna solución

(a) $\begin{aligned} mx + y + z &= 1 \\ x + my + z &= 1 \\ x + y + mz &= 1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x + y + mz &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= m \\ 2x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x - 3z &= -3 \\ 2x + my - z &= -2 \\ x + 2y + mz &= 1 \end{aligned}$

Ejercicio 10:
En los siguientes sistemas con incógnitas x, y, z, determinar los valores de m y n para que tenga:
(I) Solución única (II) Infinitas soluciones (III) Ninguna solución

(a) $\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x - y - mz &= 6 \\ -2x + 2y + 6z &= n+1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x + 4y + 2mz &= 8 \\ x + 2y - 3z &= 3n-1 \\ x + 5y - 3z &= 2n \end{aligned}$

(a) $\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 4n - 1 \\ x - y - (m-1)z &= 6 \\ -2x + 2y + 6mz &= n+1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x + 4y + (2m+1)z &= 8n-1 \\ x + 2y - 3mz &= 3n-1 \\ x + 5y - (3m-2)z &= 2n-3 \end{aligned}$

Ejercicio 11:
Determine una expresión que relacione a, b y c, de tal modo que los sistemas de ecuaciones lineales sean consistentes:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 3y + 3z = b \\ 5x + 9y - 6z = c \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ 3x - y + 5z = b \\ x - 3y + 2z = c \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 2a \\ x - y + z = 3b \\ x + y - z = 4c \end{cases}$