



LA DERIVADA

Reglas de Antiderivación

- 1) $\int x^m dx = \begin{cases} \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, & m \neq -1 \\ \ln(x), & m = -1 \end{cases}$
- 2) $\int \text{Sen}(ax) dx = -\frac{1}{a} \text{Cos}(ax) + C$
- 3) $\int \text{Cos}(ax) dx = \frac{1}{a} \text{Sen}(ax) + C$
- 4) $\int \text{Tan}(ax) dx = -\frac{1}{a} \ln(\text{Cos}(ax)) + C$
- 5) $\int \text{Cot}(ax) dx = \frac{1}{a} \ln(\text{Sen}(ax)) + C$
- 6) $\int \text{Sec}(ax) dx = \frac{1}{a} \ln(\text{Sec}(ax) + \text{Tan}(ax)) + C$
- 7) $\int \text{Csc}(ax) dx = -\frac{1}{a} \ln(\text{Csc}(ax) + \text{Cot}(ax)) + C$
- 8) $\int \text{Sec}^2(ax) dx = \frac{1}{a} \text{Tan}(ax) + C$
- 9) $\int \text{Csc}^2(ax) dx = -\frac{1}{a} \text{Cot}(ax) + C$
- 10) $\int \text{Sec}(ax) \text{Tan}(ax) dx = \frac{1}{a} \text{Sec}(ax) + C$
- 11) $\int \text{Csc}(ax) \text{Cot}(ax) dx = -\frac{1}{a} \text{Csc}(ax) + C$
- 12) $\int a^{mx} dx = \frac{a^{mx}}{m \ln(a)} + C$
- 13) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C, (a \neq -1)$
- 14) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, (a \neq -1)$

$$15) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$16) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{Sec}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Métodos de Integración

Método de sustitución:

Sean $g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g':[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, $A=g(a)$ y $B=g(b)$. Si f es continua sobre $g([a,b])$, entonces $\int_A^B f(x)dx = \int_a^b f[g(u)]g'(u)du$.

Método de integración por partes:

Sean $u:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $v:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y derivables. Entonces, para todo $x \in [a,b]$ se tiene que $\int_a^x u(t)v'(t)dt = u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^x u'(t)v(t)dt$.

Cálculo de Áreas

Si R es la región limitada por las líneas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, con $f(x) \geq g(x)$, entre $x = a$ y $x = b$, el área de R viene dada por la integral A :

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Ejercicios

Reglas de antiderivación:

$$1) \int (x^n + \sqrt[n]{x})^4 dx$$

$$2) \int \frac{(a-x)^2}{\sqrt{a-x}} dx$$

$$3) \int \frac{a^3 - x^3}{a^2 - ax + x^2} dx$$

$$4) \int \frac{(x-a)^5}{x^2 - a^2} dx$$

$$5) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

$$6) \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$$

7) $\int \frac{dx}{x^6 + x}$

8) $\int \frac{dx}{x^n + x}$

9) $\int \frac{a^x + b^x}{c^x} dx$

10) $\int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx$

11) $\int 2^x (3^x + 5^x)^2 dx$

12) $\int \text{Sen}(4x)\text{Sen}(8x)dx$

13) $\int \text{Sen}(4x)\text{Cos}(8x)dx$

14) $\int \text{Cos}(4x)\text{Cos}(8x)dx$

15) $\int \frac{\text{Cos}(2x)}{\text{Sen}^2(x)\text{Cos}^2(x)} dx$

16) $\int \frac{dx}{\text{Sen}^2(x)\text{Cos}^2(x)}$

17) $\int \frac{dx}{\text{Sec}^2(x)\text{Csc}^2(x)}$

18) $\int \text{Sen}(3x)\text{Sen}(5x)\text{Sen}(7x)dx$

19) $\int \text{Cos}(3x)\text{Cos}(5x)\text{Cos}(7x)dx$

20) $\int \text{Sen}(3x)\text{Cos}(5x)\text{Cos}(7x)dx$

21) $\int \text{Cos}(3x)\text{Sen}(5x)\text{Sen}(7x)dx$

22) $\int \sqrt{1 - \text{Cos}(4x)} dx$

23) $\int \sqrt{1 + \text{Cos}(8x)} dx$

24) $\int \sqrt{1 - \text{Cos}(ax)} dx$

25) $\int \sqrt{1 + \text{Cos}(x/a)} dx$

26) $\int \text{Tan}^2(x/2) dx$

27) $\int \text{Cot}^2(x/2) dx$

28) $\int \text{Sen}^4(x/a) dx$

29) $\int \text{Cos}^4(x/a) dx$

30) $\int \sqrt{1 + \text{Cos}(x/a)} dx$

31) $\int \text{Senh}^2(3x) dx$

32) $\int \text{Cosh}^3(2x) dx$

33) $\int \text{Senh}^2(3x)\text{Cosh}^3(2x) dx$

34) $\int \text{Cosh}^2(5x)\text{Senh}^2(5x) dx$

35) $\int \frac{dx}{9x^2 - 25}$

36) $\int \frac{dx}{36 - 25x^2}$

37) $\int \frac{dx}{16x^2 + 25}$

38) $\int \frac{dx}{25x^2 + 36}$

39) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

40) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}}$

41) $\int \frac{dx}{\text{Sen}(3x)\text{Tan}(3x)}$

42) $\int \frac{dx}{\text{Cos}(5x)\text{Cot}(5x)}$

43) $\int \frac{dx}{(2x+3)(2x-3)}$

44) $\int \frac{dx}{\text{Sec}(2x)\text{Csc}(4x)}$

45) $\int \frac{\text{Tan}(x)}{1-\text{Tan}^2(x)} dx$

46) $\int \frac{dx}{\text{Sen}(7x)\text{Cos}(2x) - \text{Cos}(7x)\text{Sen}(2x)}$

47) $\int \frac{dx}{\text{Cos}(6x) - \text{Cos}(2x)}$

48) $\int \frac{dx}{\text{Cos}(5x)\text{Cos}(3x) + \text{Sen}(5x)\text{Sen}(3x)}$

49) $\int \frac{dx}{\text{Sen}(x) + \text{Cos}(x)}$

50) $\int \frac{\text{Sen}(4x)dx}{\text{Sen}(6x) + \text{Sen}(2x)}$

51) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-16}}$

52) $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^4-49}}$

53) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$

54) $\int \frac{xdx}{\sqrt{49-25x^4}}$

55) $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^6-81}}$

56) $\int \frac{dx}{x\sqrt{49x^6-64}}$

57) $\int \frac{dx}{x^2-16x}$

58) $\int \frac{3xdx}{9x^4-16}$

59) $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+20}$

60) $\int \frac{dx}{x^5+x}$

Método de Sustitución o Cambio de variable:

1) $\int x\sqrt{1+x} dx$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$

3) $\int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^3}$

4) $\int (4x^2+5)^{10} x dx$

5) $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$

6) $\int x^2 e^{x^3} dx$

7) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

8) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^3}} dx$

9) $\int \left(\text{Cos}x \cdot \text{Cos} \frac{x}{2} \cdot \text{Cos} \frac{x}{3} \right) dx$

10) $\int \sqrt{x^5-x^4} dx$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

12) $\int \text{Sen}^2(2x)\text{Cos}^2(3x) dx$

13) $\int \frac{dx}{x(x^{10} + 1)^2}$

14) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx$

15) $\int \frac{\text{ArcTan}(x)}{x^2 + 1} dx$

16) $\int \sqrt{\frac{\text{ArcSen}(x)}{1-x^2}} dx$

17) $\int \tan(x) \ln^2(\text{Cos}(x)) dx$

18) $\int \left(\text{Sen} \frac{x}{2} \cdot \text{Sen} \frac{x}{3} \cdot \text{Sen} \frac{x}{4} \right) dx$

19) $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 4}$

20) $\int \frac{\text{Sen}(2x)}{(1 + \text{Cos}^2(x))^4} dx$

21) $\int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

22) $\int x\sqrt{4+3x^2} dx$

23) $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

24) $\int \frac{xdx}{x^4 + 3x^2 + 2}$

25) $\int \frac{(\ln(x))^n}{x} dx$

26) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2 + 4x + 13}$

27) $\int \frac{x^5 dx}{(x^6 + 1)^6}$

28) $\int \frac{(x^2 + 6x + 2)dx}{x^3 + 9x^2 + 6x + 1}$

29) $\int \frac{dx}{\text{Sen}(2x) \ln(\tan(x))}$

30) $\int \text{Cos}^5(5x) dx$

31) $\int \frac{\text{Sec}^2(bx) dx}{\sqrt{a \text{Tan}(bx) + c}}$

32) $\int \frac{\text{Sen}(x/3)}{\text{Sen}(x/2)} dx$

33) $\int \text{Sen}^5(4x) dx$

34) $\int \text{Sen}(x) \text{Cos}^5(x) dx$

35) $\int \text{Sen}^5(x) \text{Cos}(x) dx$

36) $\int \text{Cos}^6(x) \text{Sen}(2x) dx$

37) $\int \text{Sen}^5(x) \text{Cos}^3(x) dx$

38) $\int \text{Sen}^3(x) \text{Cos}^5(x) dx$

39) $\int \text{Sen}^5(4x) \text{Sen}(8x) dx$

40) $\int \text{Cos}^7(x) \sqrt{\text{Sen}(x)} dx$

41) $\int \text{Sen}^5\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{\text{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)} dx$

42) $\int \text{Sen}^5\left(\frac{2x}{3}\right) \text{Cos}^7\left(\frac{2x}{3}\right) dx$

43) $\int \text{Csc}^4(x) \text{Ctg}(x) dx$

44) $\int \text{Tan}^5(x) \text{Sec}^2(x) dx$

45) $\int \text{Sec}^7(x) \text{Tan}(x) dx$

46) $\int \text{Tan}^5(ax) dx$

47) $\int \text{Tan}^7\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) dx$

48) $\int \text{Ctg}^9\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) dx$

49) $\int \frac{e^{4x}}{\sqrt{1+e^x}} dx$

50) $\int \frac{(1 + \ln(\sqrt{3x}))^4}{\sqrt{3x}} dx$

51) $\int \frac{\text{Sec}(x) dx}{\text{Sen}(x) + \text{Cos}(x)}$

52) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

53) $\int \frac{(\text{ArcSec}(x))^4}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

54) $\int \frac{\text{Sen}(4x)}{\sqrt[3]{1+\text{Cos}^2(2x)}} dx$

55) $\int \frac{\ln(ax) dx}{\ln(bx) x}$

56) $\int \frac{a + \ln(\sqrt{bx})}{a - \ln(\sqrt{bx}) x} dx$

57) $\int \frac{1 + \ln(x^2)}{1 + \ln(x^3) x} dx$

58) $\int \frac{dx}{a + \text{sen}^2(bx)}$

59) $\int \frac{dx}{b + \text{cos}^2(ax)}$

60) $\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx$

Método de integración por partes:

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $\int \ln(x)dx$ | 2) $\int x^2 \ln(x)dx$ | 3) $\int \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 dx$ |
| 4) $\int \sqrt{x} \ln(x)dx$ | 5) $\int (\ln(x))^3 dx$ | 6) $\int \frac{x}{e^{mx}} dx$ |
| 7) $\int \frac{x^2}{e^x} dx$ | 8) $\int x^3 e^{x^2} dx$ | 9) $\int x \cos(ax)dx$ |
| 10) $\int x \operatorname{Sen}(ax)dx$ | 11) $\int (1+2x)^2 \operatorname{Sen}(2x)dx$ | 12) $\int x \operatorname{Senh}(2x)dx$ |
| 13) $\int \operatorname{ArcCos}(x)dx$ | 14) $\int \operatorname{ArcCos}\sqrt{\frac{x}{x+a}} dx$ | 15) $\int \operatorname{ArcCtg}\left(\frac{a}{x+a}\right) dx$ |
| 16) $\int x^2 \operatorname{Arctan}(x)dx$ | 17) $\int \operatorname{ArcSen}(x)dx$ | 18) $\int \operatorname{ArcSen}\left(\sqrt[3]{x}\right) dx$ |
| 19) $\int \frac{\operatorname{ArcSen}(x)}{x^2} dx$ | 20) $\int \operatorname{ArcCos}\left(\frac{1}{x}\right) dx$ | 21) $\int x (\operatorname{Arctan}(x))^2 dx$ |
| 22) $\int (\operatorname{ArcSen}(x))^2 dx$ | 23) $\int \frac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})}{x^2} dx$ | 24) $\int \operatorname{ArcTan}(\sqrt{x}) dx$ |
| 25) $\int \ln(x\sqrt{1+x^2}) dx$ | 26) $\int \sqrt{x+1} \ln(x+1) dx$ | 27) $\int x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) dx$ |
| 28) $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx$ | 29) $\int x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$ | 30) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ |
| 31) $\int \frac{\ln(x)}{(x+1)^2} dx$ | 32) $\int \operatorname{Sen}(\ln(x))dx$ | 33) $\int \operatorname{Cos}(\ln(x))dx$ |
| 34) $\int \operatorname{Sen}(x) \ln(\operatorname{Tan}(x))dx$ | 35) $\int e^{ax} \operatorname{Sen}(bx)dx$ | 36) $\int e^{ax} \operatorname{Cos}(bx)dx$ |
| 37) $\int e^{ax} \operatorname{Sen}^2(bx)dx$ | 38) $\int e^{ax} \operatorname{Cos}^2(bx)dx$ | 39) $\int x e^{ax} \operatorname{Sen}(bx)dx$ |
| 40) $\int x e^{ax} \operatorname{Cos}(bx)dx$ | 41) $\int x^2 e^{2x} \operatorname{Cos}(2x)dx$ | 42) $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$ |
| 43) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$ | 44) $\int x \sqrt{x^2+a^2} \ln\left(\frac{x^2+a^2}{a^2}\right) dx$ | 45) $\int \frac{x^2 e^x}{(2+x)^2} dx$ |
| 46) $\int \operatorname{Sec}^3(ax)dx$ | 47) $\int \operatorname{Csc}^5(ax)dx$ | 48) $\int \operatorname{Sec}^7(ax)dx$ |
- 49) Demuestre que $\int \operatorname{Tan}^n(x) = \frac{1}{n-1} \operatorname{Tan}^{n-1}(x) - \int \operatorname{Tan}^{n-2}(x)dx$, si n es un entero mayor que 1.
- 50) Demuestre que $\int \operatorname{Sec}^n(x)dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{Tan}(x) \operatorname{Sec}^{n-2}(x) + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{Sec}^{n-2}(x)dx$, si n es un entero positivo.

Cálculo de Áreas:

- 1) Calcular el área de la región limitada por la curva $y = 2^x$, el eje X, en el intervalo $[0,2]$.
- 2) Calcular el área de la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje X, en el intervalo $[0,4]$.
- 3) Calcular el área limitada por las curvas $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $x + y = 1$.
- 4) Calcular el área de la región limitada por las líneas $y = 2^x$, $y - x = 1$.
- 5) Calcular el área de la región limitada por las líneas $y = x \ln(x)$, $y = x$.
- 6) Calcular el área de la región limitada por los ejes coordenados y la línea $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.
- 7) Calcular el área de la región limitada por la línea $yx - \ln(x) = 0$, el eje X, en el intervalo $[a,b]$, donde a es el intercepto con el eje X y b es la abscisa del punto máximo.
- 8) Calcular el área de la región limitada por las líneas $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.
- 9) La función $y = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ presenta un punto máximo y un punto de inflexión. Calcular el área bajo la curva, sobre el eje X y entre los dos puntos críticos nombrados.
- 10) Hallar el área bajo la curva $y = \log(x)$, sobre el eje X, en el intervalo $[1,5]$.
- 11) Hallar el área bajo $y = x^2 e^{-x}$, sobre el eje X y limitada por las abscisas de los máximos y mínimos de la función.
- 12) Hallar el área encerrada por la línea $y = x e^{-x}$, sobre el eje X, desde $x = 0$ hasta el máximo de la función.
- 13) Calcular el área de la región limitada por la curva $4x^2 + 9y^2 = 36$.
- 14) Calcular el área limitada por la curva $y = \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$, el eje X, desde $x=0$ hasta $x=3/2$.
- 15) Hallar el área de la región limitada por el folio de la curva $y^2 = x^2(2-x)$.
- 16) Hallar el área de la región limitada por las líneas $xy = a$, $y - ax = 0$, $ay - x = 0$, $a \geq 2$.
- 17) Hallar el área de la región limitada por las líneas $y = |2 - x^2|$, $y = 1 + |x|$.
- 18) Hallar el área de la región limitada por la línea $y = x / (x^2 + 1)$, el eje X, entre sus dos valores extremos.
- 19) Calcular el área de la región limitada por las líneas $y^2 = x + 1$, $y = x - 1$.
- 20) Determinar el área de la región limitada por la curva $y = x(\ln(x))^2$, el eje X y las ordenadas $x = 1$, $x = e$.