CÁLCULO DIFERENCIAL
GUIA No 5

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Teoremas sobre funciones derivables

a) **Teorema del extremo inferior:** Sea z un punto interior del intervalo $[a,b]$ en el cual $f:[a,b]\to R$ tiene un extremo relativo. Si la derivada de f en x=z existe, entonces f´(z)=0.

b) **Teorema de Rolle:** Supóngase que $f:[a,b]\to R$ es continua, f´(x) existe para todo $x\in(a,b)$, y f(a)=f(b)=0. Entonces, existe por lo menos un punto z en (a,b) tal que f´(z)=0.

c) **Teorema del valor medio:** Supóngase que $f:[a,b]\to R$ es continua y que f tiene una derivada en (a,b). Entonces, existe por lo menos un punto z en (a,b) tal que $f'(z)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Análisis de una función

Definición : Decimos que x=a es un **punto crítico** de una función f(x), si f´(a) = 0 ó f´(a) no está definido.

Definición: Decimos que una función f(x) es **creciente** en un intervalo (a,b), si f´(x)>0 para todo x∈(a,b).

Definición: Decimos que una función f(x) es **decreciente** en un intervalo (a,b), si f´(x)<0 para todo x∈(a,b).

Definición: Decimos que en x=a habrá un **punto de inflexión** de la función f(x), si f´´(a) = 0. El punto de inflexión será (a, f(a)).

Definición: Decimos que una función f(x) es **cóncava hacia abajo** en un intervalo (a,b), si f´´(x)<0 para todo x∈(a,b).

Definición: Decimos que una función f(x) es **cóncava hacia arriba** en un intervalo (a,b), si f´´(x)>0 para todo x∈(a,b).

Definición: En una función f(x) el punto crítico x=a representa un máximo, un mínimo, un cambio de concavidad o un punto de discontinuidad.

Definición: En el punto crítico x=a habrá un máximo de la función f(x), si f´´(a)<0. El máximo será el punto (a, f(a)).

Definición: En el punto crítico x=a habrá un mínimo de la función f(x), si f´´(a)>0. El mínimo será el punto (a, f(a)).

Curvatura: Es la medida de la agudeza de la concavidad de una función en un punto. Si y=f(x), el radio de curvatura es igual a $R_C = \dfrac{\left[1+(f\,'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|f\,''(x)|}$ y la curvatura es $K=\dfrac{1}{R_C}$.

Si $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ representa ecuación paramétrica de una curva plana, entonces el radio de curvatura en un punto (x,y) es $R_C = \dfrac{\left[\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{d^2y}{dt2}-\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{d^2x}{dt2}}$.

Se llama círculo de curvatura al máximo círculo interior tangente a la curva en un punto P(x,y). El centro (a,b) del círculo de curvatura se llama centro de curvatura y sus coordenadas son: $a = x - \dfrac{f\,'(x)\left(1+(f\,'(x))^2\right)}{f\,''(x)}$, $b = y + \dfrac{\left(1+(f\,'(x))^2\right)}{f\,''(x)}$

Método de Newton - Raphson

El método de Newton-Raphson es un proceso iterativo que permite encontrar la solución aproximada de ecuaciones no lineales. Se parte de una estimación inicial x_0, y se construye una sucesión de aproximaciones de forma recurrente mediante la fórmula $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f\,'(x_n)}$.

Optimización - Razones de Cambio

Sugerencias para plantear y resolver problemas de optimización:

- Lea el problema cuidadosamente y explicite los datos e incógnitas que deben encontrarse.
- Haga un diagrama que incluya los datos pertinentes. Introduzca variables para denotar las incógnitas. Palabras como "encuentre", "qué", "cuánto", "dónde", "cuándo", deben guiarle para reconocer las incógnitas del problema.
- Escriba una lista de hechos conocidos y relaciones entre las variables. Una relación entre las variables generalmente se escribe como una ecuación.
- Después de analizar la lista de relaciones, determine la variable cuyo máximo ó mínimo se busca y exprésela como una función de una de las otras variables.
- Encuentre los puntos críticos de la función y determine cuáles maximizan o minimizan la función trabajada.

Sugerencias para plantear y resolver problemas de razones de cambio:

- Lea el problema cuidadosamente y explicite las tasas o razones que se dan en el problema.
- Determine cuáles son las tasas o razones que debe averiguar.
- Haga un diagrama que incluya los datos pertinentes. Introduzca variables para denotar las incógnitas.
- Escriba una lista de hechos conocidos y relaciones entre las variables. Una relación entre las variables generalmente se escribe como una ecuación.
- Si es necesario, exprese una variable en función de aquellas variables de las cuales tiene suficiente información.
- Después de analizar la lista de relaciones y obtener un modelo algebraico con el menor número de variables posibles, derive todas las variables implícitas y explicitas con respecto a la variable tiempo.

Teorema de Taylor

Teorema de Taylor:
Supongamos que la función f(x) definida sobre el intervalo (a,b) tiene en el punto $x_o \in (a,b)$ derivadas hasta de orden n. Entonces, cuando $x \to x_o$ se obtiene la expresión $f(x)=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$, donde $R_n(x)$ es el residuo de orden n para la aproximación de f por medio del polinomio de Taylor $P_n(x)=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Teorema de L´Hópital

Teorema de L´hopital:
Supóngase que f y g son funciones definidas en $[a,b]$, f(a)=g(a)=0 y $g(x)\neq 0$ para a<x<b. Si f y g son derivables en x=a y si $g(a)\neq 0$, entonces $\underset{x\to a+}{\text{Lím}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f´(a)}{g´(a)}$.

Ejercicios

Ejercicio 15:
Use la Regla de L´Hospital para calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan(x)}{x^3}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^m(x)}{x^n}$ c) $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$

d) $\lim_{x\to\pi/2}\left(\text{Sen}(x)\right)^{\text{Tan}(x)}$ e) $\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln(x)}}$ f) $\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{x^a-a^a}$

g) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\ln(\text{Sen}(x))}$ h) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\text{Sen}(x))}{\text{Ctg}(x)}$ i) $\lim_{x\to 0^+}\left(\text{ArcSen}(x)\right)^{\text{Tan}(x)}$

Ejercicio 16:
Obtener el polinomio de Taylor de grado n en el entorno del punto x_0, para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{Sen}(2x)$, $n = 11$, $x_0 = \pi/2$.

b) $f(x) = \text{Cos}(x/2)$, $n = 12$, $x_0 = \pi/4$.

c) $f(x) = xe^x$, $n = 8$, $x_0 = 0$.

d) $f(x) = \ln(x)$, $n = 11$, $x_0 = 2$.

e) $f(x) = x/(1+x^2)$, $n = 11$, $x_0 = 0$.

f) $f(x) = e^{-x^2}$, $n = 12$, $x_0 = 0$.

g) $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$, $n = 9$, $x_0 = 0$.

Ejercicio 17:
Halle los puntos críticos, máximos, mínimos, puntos de inflexión, intervalos de monotonía, intervalos de concavidad y gráfica de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^3 - 9x$

(b) $f(x) = x^3 - 9x^2$

(c) $f(x) = (3x^2 - x^3)^2$

(d) $f(x) = \text{Sen}2x + 3\text{Cos}2x$

(e) $f(x) = x + x^{1/3}$

(f) $f(x) = (1 - x^2)^2$

(g) $f(x) = (x^2 - 9x)^2$

(h) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 100$.

(i) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$

(j) $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

(k) $f(x) = e^{-4x^2}$

(l) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(m) $f(x) = \text{Sen}(x) + \text{Cos}(2x)$

(n) $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$

(o) $f(x) = x - \ln(1+x)$

(p) $f(x) = x^2e^{-x}$

(q) $f(x) = x^3 - 12x$.

(r) $f(x) = (x^2 - 10x)^2$.

(s) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$.

(t) $f(x) = x - 2\text{Sen}^2(x)$

Ejercicio 18:
Resolver los siguientes problemas:

a) Demuestre que el gráfico de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ tiene tres puntos de inflexión que yacen en una misma recta.

b) Demuestre que cada polinomio de orden impar, distinto del lineal, tiene al menos un punto de inflexión.

c) Demuestre que una función cuadrática tiene exactamente un punto crítico en su dominio y que su gráfica no tiene puntos de inflexión.

d) Demuestre que la gráfica de una función polinómica de tercer grado tiene exactamente un punto de inflexión.

e) Determinar los coeficientes p y q de la función $y = x^2 + px + q$, de forma que $y = 3$ sea un mínimo de esta cuando $x = 1$.

f) Encuentre los valores de a y b de manera que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un extremo relativo en (2,3).

g) Encuentre los valores a, b y c tales que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un valor máximo relativo de 7 en 1 y su gráfica pase por el punto (2,-2).

h) Halle a, b, c y d tales que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un extremo relativo en (1,2) y (2,3).

i) Dada la función $f(x) = x^p(1-x)^q$, donde p y q son enteros positivos mayores que 1, demuestre las siguientes afirmaciones:

- Si p es par, f tiene un valor mínimo relativo en 0.
- Si q es par, f tiene un valor mínimo relativo en 1.
- f tiene un valor máximo relativo en $p/(p+q)$ siendo p y q pares o impares.

j) Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine a y b de manera que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en (1,2).

k) Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, encuentre los valores de a, b y c, de manera que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en (1,2) y que la pendiente de la tangente de inflexión ahí se igual a -2.

l) Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determine a, b, c y d, de manera que f tenga un extremo relativo en (0,3) y que su gráfica tenga un punto de inflexión en (1,-1).

Ejercicio 19:

Determine la curvatura K y radio de curvatura ρ en el punto dado. Dibuje la curva, un segmento de la recta tangente y la circunferencia de curvatura en el punto dado:

a) $y = 2\sqrt{x}$; P(1,2).

b) $y^2 = x^3$; P(1,1).

c) $y = e^x$; P(0,1)

d) $y = \ln(x)$; P(1,0).

e) $y = \text{Sen}(x)$; P(π/2,1).

f) $4x^2 + 9y^2 = 36$; P(0,2).

g) $y = \text{Sen}^{-1}(x)$; P(1,π/2).

h) $4x^2 - 9y^2 = 16$; P(2,0).

i) $y = \ln(x)$; P(1,0).

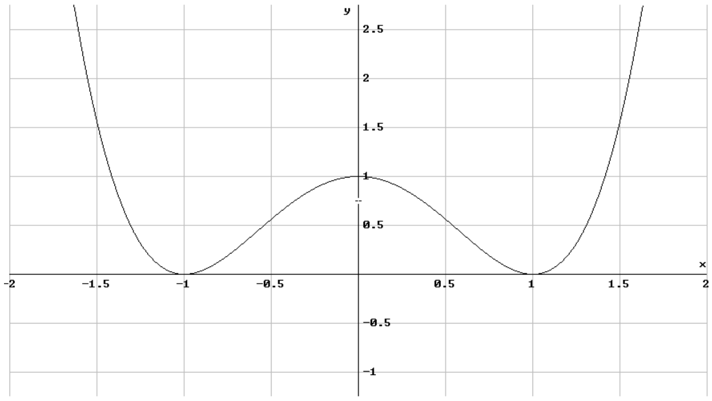
j) $y = \text{Cos}(x)$; P(π/3,1/2).

k) $y = x^4 - x^2$; P(0,0).

l) $x = \sqrt{y-1}$; P(2,5).

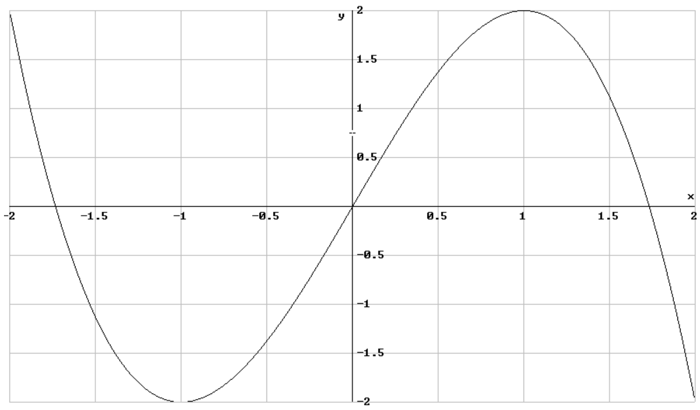
Ejercicio 20:
Resolver los siguientes problemas relacionados con las gráficas de f y sus derivadas:

a) Para la función f que aparece en la gráfica 1, trace las gráficas de f´(x) y f´´(x).
.



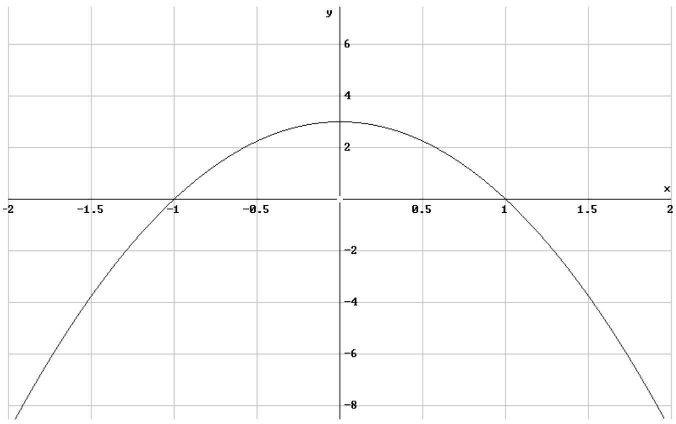
Gráfica 1.

b) Para la función f que aparece en la gráfica 2, trace las gráficas de f´(x) y f´´(x).

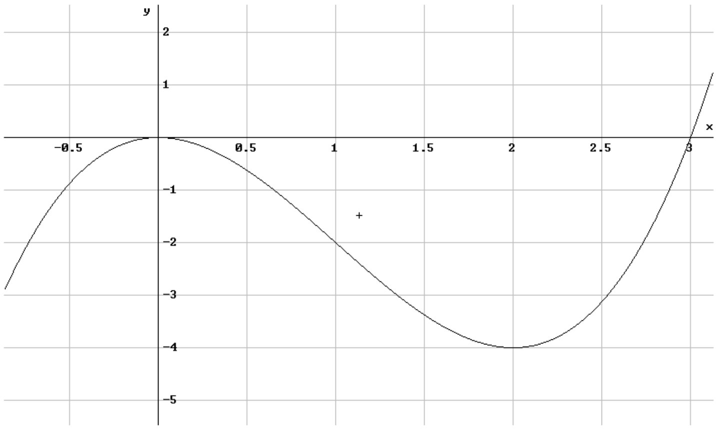


Gráfica 2.

c) Para las gráficas de f´que se dan a continuación, determine:
- ¿En qué intervalos f es creciente? ¿En cuáles es decreciente?
- ¿f tiene máximos o mínimos? ¿En dónde?



Gráfica 3.



Gráfica 4.

Ejercicio 21:
Resolver los siguientes problemas de optimización:

a) Dividir un número positivo dado M en dos sumandos, de tal forma, que su producto sea el mayor posible.

b) ¿Cuál de los triángulos rectángulos de perímetro dado, igual a 2p, tiene mayor área?

c) Encuentre las dimensiones del triángulo de mayor área que se puede inscribir en: (a) una semicircunferencia de radio R, (b) una circunferencia de radio R.

d) Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en: (a) una semicircunferencia de radio R, (b) una circunferencia de radio R.

e) Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en un cono recto de radio R y altura H.

f) Encuentre las dimensiones del cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio R.

g) Encuentre las dimensiones del cono circular recto de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera de radio R.

h) Encuentre las dimensiones del cono circular recto de menor volumen que se puede circunscribir a una esfera de radio R.

i) Si se quiere fabricar una caja con tapa que tenga forma de paralelepípedo rectángulo, una capacidad de 72 dm^3, y que los lados de la base estén en relación 1:2, ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el material gastado sea el menor posible?

j) Un tanque abierto de forma cilíndrica tiene un volumen igual a 1000 dm^3. ¿Cuál debe ser el radio de la base y la altura, para que su superficie total sea la menor posible?

k) El volumen de un prisma de base triangular regular es igual a 1000 cm^3. ¿Cuáles deben ser las medidas de la base y la altura del prisma, para que su superficie total sea la menor posible?

l) Un mezclador de cemento con forma cónica debe tener una generatriz de 1.20 metros. ¿Cuál debe ser la altura para que su capacidad sea la mayor posible?

m) Se tiene un alambre de longitud 72 cm, con el cual se quiere bordear un cuadrado y un triángulo equilátero. ¿Cómo se debe dividir el alambre para que la suma de las áreas de las figuras sea la mayor posible?

n) En una página de libro, el texto impreso debe ocupar 300 cm^2. Los márgenes superior e inferior deben ser iguales a 3 cm y los márgenes derecho e izquierdo deben ser iguales a 2.5 cm. Si tomamos en consideración la economía del papel, ¿Qué dimensiones serían las más ventajosas?

o) Un constructor de cabañas debe gastar en las cuatro ventanas de una cabaña un total de 20 metros de madera para marcos. Las ventanas deben tener forma de rectángulo coronado por un triángulo equilátero. ¿Qué dimensiones debe tener cada ventana para que la luz que pase sea la mayor posible?

p) Se desea construir un recipiente con tapa con base hexagonal regular. ¿Cuál es la menor cantidad de material que se requiere en la manufactura de este recipiente, si queremos que su capacidad sea de 120 dm^3?

q) Se va a transportar un tubo de acero por un corredor de 9 pies de ancho. Al final corredor hay una vuelta en ángulo recto hacia un corredor más estrecho de 6 pies de ancho. ¿Cuál es la mayor longitud que puede tener un tubo que pueda transportarse horizontalmente alrededor de la esquina?

r) Una fábrica de cajas dispone de láminas cuadradas de triplex de 6400 cm^2. A las láminas se les recortan cuadrados en las esquinas, de modo que resulte una caja con la mayor capacidad posible. ¿Cuánto debe medir cada lado de la caja?

s) Un buque pesquero se encuentra a una distancia de 2 km mar adentro del pueblo más cercano de una playa recta y desea llegar a otro punto de la playa a 6 km del primero. Suponiendo que el buque puede andar a una velocidad de 3 km/h y, estando en la playa, la mercancía se puede transportar en otro tipo de vehículo a una velocidad de 5 km/h, ¿qué trayectoria se debe seguir para que la mercancía llegue a su destino en el menor tiempo posible?

t) Se va a fabricar un canal, de forma que su sección transversal sea un trapecio isósceles cuya base menor y cuyos lados no paralelos miden 10 pulgadas, respectivamente. Determinar el valor del ángulo de inclinación de las caras no paralelas, de modo que la capacidad del canal sea la mayor posible.

u) Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado con un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana que deja pasar más luz, si su perímetro mide 5 metros.

v) Un constructor de cabañas para centros de recreación, dispone de troncos cónicos de madera de 2.4 metros de altura. Los diámetros de las bases de cada tronco miden 70 cm y 40 cm, respectivamente. Se deben obtener vigas de sección transversal cuadrada cuyo eje coincida con el eje del tronco y cuyo volumen sea el mayor posible. ¿Qué dimensiones deben tener las vigas?

w) Se desea construir un recipiente con la forma de un cilindro circular sin tapa con un volumen de 240π cm^3. El precio del material que se usa para el fondo es el triple que el del material que se usa para la parte lateral. Encuentre las dimensiones del recipiente para las cuales el costo sea mínimo.

x) Un abrevadero de 6 metros de largo tiene sus extremos en forma de triángulos isósceles cuyos lados iguales son de 1.20 metros de longitud. Determinar la anchura en la parte superior de un extremo triangular, de manera que el volumen del abrevadero sea máximo.

y) Un ganadero desea vallar un prado rectangular adyacente a un río. El prado ha de tener 180.000 m^2 con el fín de proporcionar suficiente pasto al ganado. ¿Qué dimensiones debe tener para que se requiera la menor cantidad de valla posible, teniendo en cuenta que no hay que poner valla en el lado que da al río?

z) Dos postes de 15 y 20 pies de altura, distan 25 pies. Hay que conectarlos mediante un cable que esté atado en algún punto del suelo entre ellos. ¿En qué ha de amarrarse al suelo con el fín de utilizar la menor cantidad de cable posible?

Ejercicio 22:
Resolver los siguientes problemas de optimización:

a) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 + 5x$ cuya pendiente sea mínima.

b) Determine la distancia más corta desde el punto P(2,0) hasta un punto de la curva $y^2 - x^2 = 1$, y obtenga el punto de la curva más cercano a P.

c) Inscribir un rectángulo de la mayor área posible en el segmento de la parábola $y^2 = 2px$ cortado por la recta $x = 2a$.

d) Se quiere inscribir un rectángulo en la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. ¿Cuáles son las medidas del rectángulo cuya área es la mayor posible?

e) Un rectángulo tiene dos vértices en el eje de las x y los otros dos sobre la parábola $y = 12 - x^2$, con $y \geq 0$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que bajo estas condiciones tiene la máxima área?

f) Por el punto P(4,1) se trazan rectas que cortan los semiejes positivos en los puntos A y B. Hallar la ecuación de la recta para la cual el segmento AB tiene la longitud mínima.

g) Un rectángulo tiene dos vértices en el eje de las x y los otros dos sobre la parábola $f(x)=4-\frac{x^2}{4}$, como se muestra en la figura 1. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que bajo estas condiciones tiene la máxima área?

h) Un rectángulo tiene dos vértices sobre la parábola $f(x)=\frac{x^2}{4}$ y los otros dos sobre la parábola $f(x)=5-\frac{x^2}{10}$, y los lados son paralelos a los ejes coordinados, como se muestra en la figura 2. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que bajo estas condiciones tiene la máxima área?

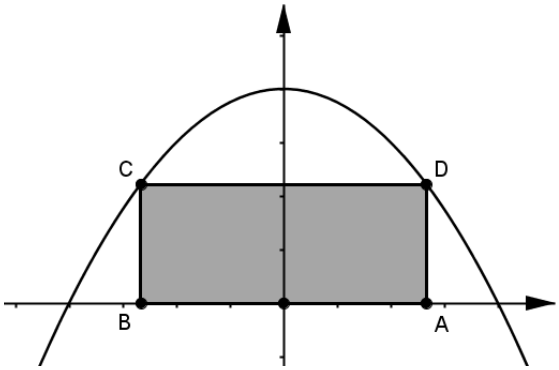


Figura 1

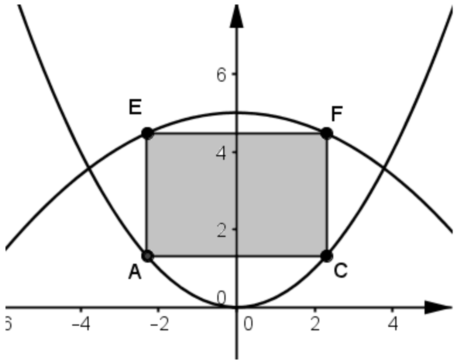


Figura 2

Ejercicio 23:
Resolver los siguientes problemas de optimización:

a) Supóngase que C(x) dólares es el costo total de producción de x marcos, y $C(x) = 50 + 8x - 0.01x^2$. Determinar Costo marginal cuando x=60.

b) Supongamos que R(x) dólares es el ingreso total que se obtiene por la venta de x mesas, y $R(x) = 300x - 0.5x^2$. Hallar la función de ingreso marginal y el ingreso marginal cuando x=40.

c) La ecuación de demanda de una cierta mercancía es $5x + 3p = 15$. Hallar la función de ingreso marginal y trazar las curvas de demanda, de ingreso total y de ingreso marginal.

d) El costo total de producción de x relojes en una cierta planta está dada por $C(x) = 1500 + 30x + x^2$. Hallar la función de costo marginal y el costo marginal cuando x=40.

e) Si la ecuación de demanda de una cierta mercancía es $3x + 4p = 12$. ¿Para qué valor de x el ingreso total es máximo?

f) La ecuación de demanda de determinada mercancía es $p^2 + 4x^2 - 80x - 1500 = 0$ donde se demandan x unidades cuando el precio unitario es p dólares. Calcule el ingreso marginal cuando se demandan 30 unidades y el ingreso máximo.

g) La función de ingreso total R de una cierta mercancía está dada por $R(x) = x(9-2x)/3$. Hallar la ecuación de demanda y la función de ingreso marginal.

h) Una empresa determina que el costo C(x) por producir x unidades de cierto artículo de consumo es aproximadamente $C(x) = 100 + 10/x + x^2/200$. ¿Cuántas unidades deben producirse para que el costo sea mínimo?

i) Una empresa calcula que para vender x unidades de cierta mercancía el precio por unidad deber ser 1800 - 2x. Suponiendo que el costo de fabricación de x unidades es $1000 + x + 0.01x^2$, encuentre el número de unidades para el cual la ganancia es máxima.

j) El costo total de producción de x unidades de un cierto artículo es C(x) dólares, donde $C(x) = \sqrt{3x^2 + 25} + 2x + 50$. Obtener el costo marginal para 20 unidades.

Ejercicio 24:
Resolver los siguientes problemas de razones de cambio:

a) El volumen de un globo aumenta a razón de 10 cm^3/seg cuando la longitud de su radio es de 2 cm. ¿Cuál será la superficie del globo en el instante en que su radio mide 15 cm?

b) En un instante dado los catetos de un triángulo rectángulo miden 8 cm y 6 cm, respectivamente. El primer cateto decrece a razón de 1 cm/seg y el segundo cateto crece a razón de 2 cm/seg. ¿Con qué rapidez está creciendo el área?

c) La arista de un cubo crece a razón de 4 cm/seg. ¿Con qué rapidez está creciendo el volumen cuando la arista mide 10 cm?

d) Un niño está elevando una cometa; cuando la cometa está a 16 metros de altura, un viento horizontal sopla a razón de 12 m/seg. ¿Con qué velocidad está el niño soltando la cuerda de la cometa, cuando ha utilizado 25 metros de cuerda?

e) El diámetro y la altura de un cilindro circular recto son, en un instante dado, 10 cm y 20 cm respectivamente. Si el diámetro aumenta a razón de 1 cm/seg, ¿Qué alteración de la altura mantendrá constante el volumen?

f) El radio de la base de cierto cono aumenta a razón de 3 cm/h y la altura disminuye a razón de 4 cm/h. Calcule como varía el área total del cono cuando el radio mide 7 cm y la altura 24 cm.

g) Dos ciclistas salen del mismo punto hacia lugares diferentes, uno de ellos sale hacia el norte con una velocidad de 40 km/h mientras que el otro sale hacia el oeste con una velocidad de 30 km/h. ¿A que velocidad se distancian uno del otro al cabo de 2 horas?

h) Dos barcos navegan a partir de un mismo puerto isleño, uno hacia el norte a 24 millas por hora y el otro hacia el este a 30 millas por hora. El barco de la ruta norte partió a las 9:00 A.M., y el de la ruta este a las 11:00 A.M. ¿Con qué rapidez aumenta la distancia entre ellos a las 2:00 P.M.?

i) Una piscina de natación tiene 40 pies de largo, 20 de ancho y 8 de profundidad en un extremo y 3 en el otro, el fondo es un plano inclinado rectangular. Si la piscina se llena bombeando agua a razón de 40 pies cúbicos por minuto, ¿Con qué rapidez sube el nivel cuando tiene tres pies de profundidad en el extremo más profundo?

j) El lado de una placa metálica cuadrada expuesta a altas temperaturas se dilata a razón de 2 cm/min, mientras que su grosor de 2.5 cm permanece constante. ¿Como varia el volumen de la placa en el instante en su lado mide 40 cm?

k) De un tubo sale arena a razón de 16 pies cúbicos por segundo. Si la arena forma en el suelo una pirámide cónica cuya altura es siempre ¼ del diámetro de la base, ¿Con qué rapidez aumenta la pirámide cuando tiene 4 pies de altura?

l) Un objeto metálico formado por un cilindro rematado en uno de sus extremos por una semiesfera disminuye su radio a razón de 2 cm/min mientras que la altura de la parte cilíndrica aumenta a razón de 3 cm/min. ¿Cómo varía el volumen y la superficie lateral de dicho objeto en el instante que su radio mide 6 cm y la altura mide 18 cm?

m) Una lámpara de arco cuelga a la altura de 4 metros directamente sobre un paseo rectilíneo y horizontal. Si en este paseo un niño de 1.5 metros de estatura camina alejándose de la lámpara a razón de 55 m/min. ¿A razón de cuántos metros por minuto se alarga su sombra?

n) Una partícula P se mueve a lo largo de la curva y = $\sqrt{x^2-4}$, $x \geq 2$, de modo que la abscisa de P aumenta a razón de 5 unidades por segundo. ¿Con qué rapidez aumenta la ordenada de P cuando x=3?

o) Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados positivos y el vértice opuesto al origen de coordenadas está sobre la curva cuya ecuación es $f(x)=2^{x/3}$, como se muestra en la figura 3. En este vértice la ordenada aumenta a razón de 2 unidades por minuto. ¿A qué razón varía el área y el perímetro del rectángulo cuando x=6?

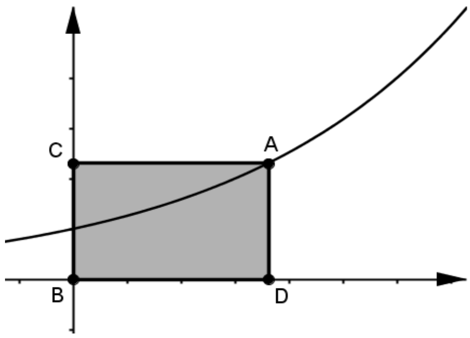


Figura 3.

Ejercicio 25:
Hallar una raíz de las siguientes ecuaciones en el intervalo dado:

a) $x^3 - 10x - 5 = 0$, en $[3,5]$.

b) $x\log(x) - 10 = 0$, en $[5,6]$.

c) $e^x - 2x = 0$, en $[0,1]$.

d) $\text{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)+x-4=0$, en $[2,4]$.

e) $x-\sqrt{x}-3=0$, en $[4,6]$

g) $x^6 - x - 1 = 0$, en $[1,2]$.

Ejercicio 26:
Obtener la serie de Taylor de la función f(x) = Sen(x) alrededor de a=0.

a) Obtener los polinomios de grado 3, 5, 7, 9 y 11.
b) Calcule Sen(1/10) y Sen(1/5).

Ejercicio 27:
Obtener la serie de Taylor de la función f(x) = Cos(x) alrededor de $a=\pi$.

a) Obtener los polinomios de grado 4, 6, 8, 10 y 12.
b) Calcule Cos(3) y Sen(3.5).

Ejercicio 28:
Use la serie de Taylor de la función f(x) = e^x alrededor de a=0.

a) Obtener los polinomios de grado 3, 5, 7, 9 y 11.
b) Calcule $e^{1/2}$ y $e^{1/4}$.

Ejercicio 29:
Use la serie de Taylor de la función f(x) = ln(1+x) alrededor de a=0.

a) Obtener los polinomios de grado 3, 5, 7, 9 y 11.
b) Calcule ln(0.5) y ln(1.5).

Ejercicio 30:
Use la serie de Taylor de la función f(x) = arctan(x) alrededor de a=0.

a) Obtener los polinomios de grado 3, 5, 7, 9 y 11.
b) Calcule arctan(0.5) y arctan(0.1).

Ejercicio 31:
Justifique los siguientes desarrollos de Taylor:

a) $a^x = \sum_{n=0} \frac{(\log a)^n}{n!} x^n$, (a>0)

b) $Senhx = \sum_{n=0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

c) $e^{-x} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$, (a>0)

d) $Coshx = \sum_{n=0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

e) $Arc\tan(x) = \sum_{n=0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

f) $\log(x+1) = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

g) $Sen^2 x = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$

h) $\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0} \frac{x^n}{2^{n+1}}$

i) $Sen^3(x) = \frac{3}{4} \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

j) $\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Ejercicio 32:
Use la Regla de L´Hospital para calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^3}$

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^m(x)}{x^n}$

c) $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$

d) $\lim_{x\to \pi/2} \left(\text{Sen(x)}\right)^{\text{Tan(x)}}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln(x)}}$

f) $\lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{x^a - a^a}$

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\text{x})}{\ln(\text{Sen(x)})}$

h) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\text{Sen(x)})}{\text{Ctg(x)}}$

i) $\lim_{x\to 0^+} \left(\text{ArcSen(x)}\right)^{\text{Tan(x)}}$
