CÁLCULO DIFERENCIAL
GUIA No 4

LA DERIVADA

Definición - Interpretación geométrica

Definición:

Sea $f:[a,b]\to R$ y $z\in[a,b]$. Un número L es la derivada de f en x=z, si dado un $\varepsilon>0$ existe un $\delta(f,\varepsilon)>0$ talque si $|x-z|<\delta$ entonces $\left|\frac{f(x)-f(z)}{x-z}-L\right|<\varepsilon$. Es decir, la función f es derivable en x=z si $\lim\limits_{x\to z}\frac{f(x)-f(z)}{x-z}=L$. El límite L se simboliza también f´(z). Si se hace la sustitución x-z=h, entonces la definición queda $f'(z)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$.

Si y = f(x), entonces la derivada de f con respecto a la variable independiente x se denota como: a) $y'=f(x)$ b) $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ c) $dy=f'(x)dx$ d) $dy=D(f(x))$

Interpretaciones de la derivada:

a) **Geométrica:** La derivada de f cuando x=z se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación y=f(x) en el punto (z,f(z)). En las figuras 1 y 2 se ilustra el proceso del paso de la recta secante PQ a la recta tangente en P a medida que $h\to 0$. Así, la ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva y=f(x) en el punto (a,f(a)) son y-f(a)=f´(a)(x-a) y y-f(a)=$-\frac{1}{f(a)}$(x-a).

b) **Física:** Si y=f(x) representa la posición de una partícula, la velocidad media en el intervalo de tiempo $[z,x]$ es la expresión $V_m=\frac{f(x)-f(z)}{x-z}$, y la velocidad instantánea cuando x=z es $V_i(z)=\lim\limits_{x\to z}\frac{f(x)-f(z)}{x-z}$. (Ver figuras 1 y 2).

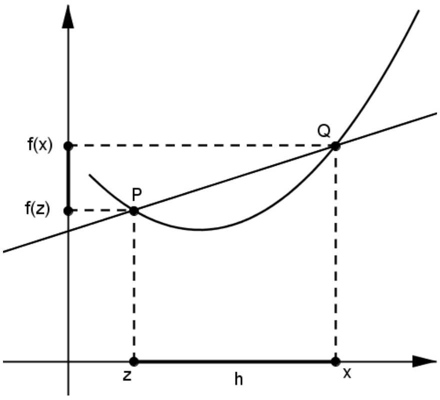


Figura 1

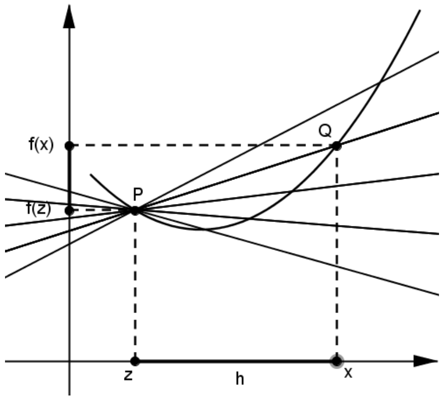


Figura 2

Derivadas laterales:

Una función es derivable en un punto (z,f(z)) si y sólo si, es derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto, es decir, si los límites laterales $f'(z^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ y $f'(z^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ son iguales.

Derivada simétrica:

Sea $f: R \to R$. La derivada simétrica de f cuando x=z se designa por $f_S'(z)$ y se define como $f_S'(z) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h}$, si el límite existe.

Teoremas sobre derivadas:

a) Si $k \in R$ y $f(x) = k \cdot u(x)$, entonces $f'(x) = k \cdot u'(x)$.

b) Si f(x) = u(x) + v(x), entonces $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

c) Si f(x) = u(x)v(x), entonces $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

d) Si f(x) = $\frac{u(x)}{v(x)}$, entonces $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(X) - v'(x) \cdot u(x)}{v(x)^2}$.

e) Sean $g:[a,b] \to R$ y $f:[c,d] \to R$ funciones tales que $f([c,d] \subset [a,b]$ y sea $k \in [c,d]$. Si f es derivable en k y g es derivable en f(k), entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en k, y $(g \circ f)'(k) = g'(f(k))f'(k)$.

f) Dadas dos funciones $F: R^2 \to R$ y $f: R \to R$, la ecuación F(x,y)=0 define implícitamente la función y=f(x) si F(x,y)=0 para todo x en el dominio de f. Si y=f(x) es derivable entonces existe una expresión G(x,y) talque $\frac{dy}{dx} = G(x,y)$.

g) Si $f:[a,b] \to R$ tiene una derivada en $c \in [a,b]$, entonces f es continua en x=c.

Reglas de derivación:

a) Si $f(x)=x^n$, entonces $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$.

b) Si f(x)=Sen(x), entonces $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{Sen(x+h) - Sen(x)}{h} = Cos(x)$.

c) Si f(x)=Cos(x), entonces $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{Cos(x+h) - Cos(x)}{h} = -Sen(x)$.

d) Si f(x)=Tan(x), entonces $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{Tan(x+h) - Tan(x)}{h} = Sec^2(x)$.

e) Si f(x)=Cot(x), entonces $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{Cot(x+h) - Cot(x)}{h} = -Csc^2(x)$.

f) Si f(x)=Sec(x), entonces f´(x) = $\lim\limits_{h\to 0}\frac{Sec(x+h)-Sec(x)}{h}=Sec(x)Tan(x)$.

g) Si f(x)=Csc(x), entonces f´(x) = $\lim\limits_{h\to 0}\frac{Csc(x+h)-Csc(x)}{h}=-Csc(x)Cot(x)$.

h) Si f(x)=$\log_a(x)$, entonces f´(x) = $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h}=\frac{1}{x}\log_a(e)$.

i) Si f(x)=a^x, entonces f´(x) = $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\ln(a)$.

j) Si $y=Sen^{-1}(x)\to x=Sen(y)\to \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

k) Si $y=Cos^{-1}(x)\to x=Cos(y)\to \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

l) Si $y=Tan^{-1}(x)\to x=Tan(y)\to \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$.

m) Si $y=Cot^{-1}(x)\to x=Cot(y)\to \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$.

n) $y=Sec^{-1}(x)\to x=Sec(y)\to \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

o) $y=Sec^{-1}(x)\to x=Sec(y)\to \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Ejercicios

Ejercicio 1:

Determine si la función dada es derivable en el punto dado:

a) $f(x)=e^{2x}$, en x=1.

b) $f(x)=\log(x)$, en x=1.

c) $f(x)=Sen(2x)$, en x=π/4.

d) $f(x)=Tan(x)$, en x=π/2.

e) $f(x)=e^{-x^2}$, en x=0.

f) $f(x)=|2-x^2|$, en x=2.

g) $f(x)=x|x|$, en x=0.

h) $f(x)=|x-4|$, en x=4.

i) $f(x)=\sqrt{2x-3}$, en x=3/2.

j) $f(x)=1-x^{2/3}$, en x=1.

k) $f(x)=\frac{x}{x^2+|x|}$ en x=0

l) $f(x)=\frac{x}{|4-x^2|}$ en x= 2.

Ejercicio 2:

Use la definición de derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, para obtener la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x+a}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

d) $f(x) = Sen^2(x)$

e) $f(x) = e^{2x}$

f) $f(x) = \log_a(x)$

g) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

h) $f(x) = Sec^3(2x)$

Ejercicio 3:

Use la definición de derivada simétrica $f_s'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$, para obtener la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{3-x}$

b) $f(x) = \sqrt[4]{x^2+1}$

c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

d) $f(x) = Sen^3(2x)$

e) $f(x) = e^{-3x}$

f) $f(x) = \log_a(x)$

g) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

h) $f(x) = Tan^3(2x)$

Ejercicio 4:

Sea f una función tal que $\underset{u \to 0}{Lím}\left(\frac{f(2+u) - f(2)}{u}\right) = 2$. Calcule:

a) $\underset{x \to 0}{Lím}\left(\frac{f(2+3x) - f(2+2x)}{4x}\right)$

b) $\underset{x \to 0}{Lím}\left(\frac{f(2+4x) - f(2+7x)}{3x}\right)$

c) $\underset{x \to 0}{Lím}\left(\frac{f(2+3x) - f(2+9x)}{12x}\right)$

d) $\underset{x \to 0}{Lím}\left(\frac{f\left(2+\frac{x}{4}\right) - f\left(2+\frac{x}{3}\right)}{12x}\right)$

e) $\underset{x \to 0}{Lím}\left(\frac{f(2+3x) - f(2-3x)}{x}\right)$

f) $\underset{x \to 0}{Lím}\left(\frac{f(2+5x) - f(2-5x)}{3x}\right)$

Ejercicio 5:

¿Qué valores deben tomar a y b, para que las funciones dadas sean derivables en R?

a) $f(x)=\begin{cases} ax+b & , x\le 1 \\ x^2 & , x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} a+bx^2 & , |x|<1 \\ \dfrac{1}{|x|} & , |x|\ge 1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} ax^3+bx & , x\le 2 \\ \dfrac{1}{\pi}\text{Sen-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) & , x>2 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} a+bx^2 & , |x|<1 \\ \dfrac{1}{|x|} & , |x|\ge 1 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} ax+b & , x<0 \\ a\text{Cos}(x)+b\text{Sen}(x) & , x\ge 0 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} \text{Tan-1}(a) & , |x|\le 1 \\ \dfrac{bx}{|x|}+\dfrac{x-1}{2} & , |x|>1 \end{cases}$, en x=1, x=-1.

Ejercicio 6:

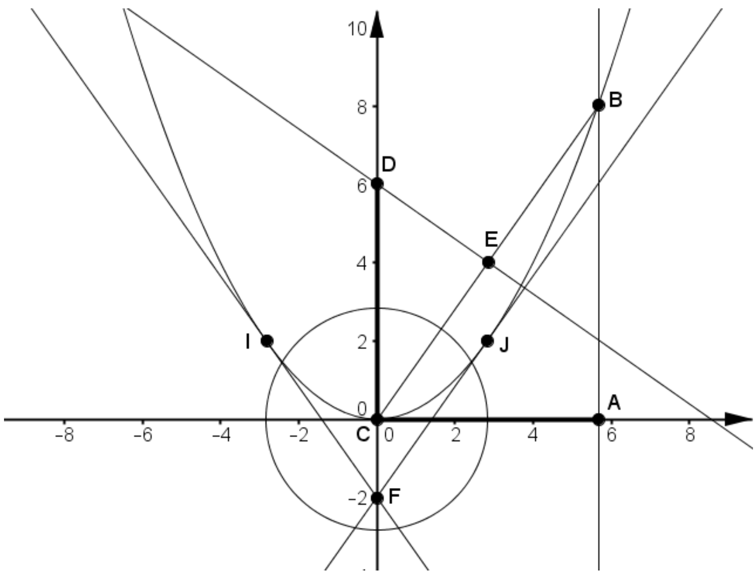
En la figura, la recta AB es perpendicular al eje X, la recta DE es mediatriz del segmento CB, las rectas FI y FJ pasan por el punto F=(0,-2) y son tangentes a la curva $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ en los puntos I y J respectivamente.

a) Si x y h son las longitudes de los segmentos CA y CD respectivamente, exprese h en función de x.

b) Calcule $\underset{x\to 0}{\text{Lím}}\left(\dfrac{h(3+x)-h(3)}{x}\right)$.

c) Encuentre las coordenadas de los puntos de tangencia I y J.

d) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ en los puntos de tangencia I y J.



Ejercicio 7:

Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva dada:

a) $f(x)=\sqrt{4x^2+5x}$ cuando x = 1.

b) $f(x)=\sqrt{x^2+4x-1}$ cuando x = 1.

c) $f(x)=\dfrac{4x+x^2}{x+10}$ cuando x = 2.

d) $f(x)=\dfrac{4x}{4+x^2}$ cuando $f(x)$ = 1.

e) f(x) = (4x – x^2)^2 cuando f(x) = 9.

f) $f(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2-16}}$ en el punto P$\left(5,\dfrac{20}{3}\right)$.

g) $f(x)$ = $\text{Sen}^3(2x)$ cuando $x=\pi/3$.

h) $f(x)=\ln\left(\text{Sec(x)}\right)$ en los puntos donde $f\,'$(x) = 1.

i) f(x) = Arctan(x), cuando f(x) = $\pi/4$.

Ejercicio 8:

Use las reglas de derivación que correspondan para obtener la derivada de las siguientes funciones algebraicas:

a) $f(x)=\dfrac{(a+x)^m}{(a-x)^n}$

b) $f(x)=\dfrac{(1+x^m)^n}{(1-x^n)^m}$

c) $f(x)=\left(\dfrac{1+x+x^2}{1-x-x^2}\right)^{20}$

d) $f(x)=\left(a+\left(a+\left(a+x^5\right)^5\right)^5\right)^5$

e) $f(x)=\dfrac{(1+x^m)^n}{\sqrt[m]{1-x^n}}$

f) $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{a-x}{a+x}}$

g) $f(x)=\sqrt[5]{\left(\dfrac{ax-b}{ax+b}\right)^3}$

h) $f(x)=\left(\dfrac{bx+a}{bx+a}\right)^3\sqrt[3]{\left(\dfrac{ax-b}{ax+b}\right)}$

i) $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{\sqrt[4]{ax^2-bx-c}}$

j) $f(x)=\sqrt[n]{\dfrac{a}{x}+\sqrt[n]{\dfrac{a}{x}+\sqrt[n]{\dfrac{a+x}{x}}}}$

Ejercicio 9:

Use las reglas de derivación que correspondan para obtener la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $f(x)=\dfrac{Sen(ax)+Sen(bx)}{Cos(ax)-Cos(bx)}$

b) $f(x)=\dfrac{Sec^n(ax)+Csc^n(bx)}{Sec(bx)+Csc(ax)}$

f) $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{a-Sen(ax)}{a+Sen(ax)}}$

g) $f(x)=\sqrt[m]{\left(\dfrac{Cos(ax-b)}{Sen(ax+b)}\right)^n}$

c) $f(x)=\left(\dfrac{Tan(ax)+Cot(bx)}{Tan(bx)+Cot(ax)}\right)^n$

h) $f(x)=\left(\dfrac{Tan(bx)+ax}{Cot(bx)-ax}\right)^m$

d) $f(x)=\left(Sen(x)+\left(Cos(x)+\left(Tan(x)\right)^n\right)^n\right)^n$

i) $f(x)=\dfrac{Sen\left(\sqrt{ax}\right)}{\sqrt{ax+Cos\left(\sqrt{ax}\right)}}$

e) $f(x)=\dfrac{\left(1+Tan(x)\right)^n}{\sqrt[m]{1-Tan^n(x)}}$

j) $f(x)=\sqrt[n]{\dfrac{Sec(x)}{x}+\sqrt[n]{\dfrac{Sec(x)}{x}}}$

Ejercicio 10:

Use las reglas de derivación que correspondan para obtener la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $f(x)=x^2ArcSen(x^2)$

b) $f(x)=\sqrt[n]{ArcSec(x^2)}$

c) $f(x)=\dfrac{Sen(x)}{ArcCos(x^2)}$

d) $f(x)=Csc(x^2)ArcCsc(x^2)$

e) $f(x)=\dfrac{ArcTan\left(\dfrac{x}{2}\right)}{ArcC\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{2}{x}\right)}$

f) $f(x)=\dfrac{ArcSec\left(\dfrac{a}{b}x\right)}{ArcCsc\left(\dfrac{b}{a}x\right)}$

g) $f(x)=\dfrac{Sec(x)+Csc(x)}{ArcSec(x^2)}$

h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{ArcCsc(x^n)}{ArcSen(x^m)}}$

i) $f(x)=\sqrt{x}ArcSec(\sqrt{x})$

j) $f(x)=x^2ArcSec\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Ejercicio 11:

Use las reglas de derivación que correspondan para obtener la derivada de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $f(x)=\log_3\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)$

b) $f(x)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$

c) $f(x)=x^n\sqrt[n]{lon(x^n)}$

d) $f(x)=\log_2\left(\log_3\left(\log_4\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right)\right)$

e) $f(x)=\sqrt{\log(x)+\sqrt{\log(x)+\sqrt{\log(x)}}}$

f) $f(x)=\dfrac{\log_2(x)+\log_4(x)}{\log_2(x)-\log_4(x)}$

g) $f(x)=\sqrt{\log_8(x^2)+\sqrt{\log_4(x^4)+\sqrt{\log_2(x^8)}}}$

h) $f(x)=\sqrt[16]{\dfrac{\log_2(x)\cdot\log_4(x)}{\log_8(x)\cdot\log_{16}(x)}}$

Ejercicio 12:

Use las reglas de derivación que correspondan para obtener la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{Sen(x)}{x}}}{3^{\frac{Cos(x)}{x}}}$ b) $f(x)=2^{Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)}$ c) $f(x)=\sqrt[3]{x}^{\sqrt[4]{x}^{\sqrt[5]{x}^{\sqrt[6]{x}}}}$

d) $f(x)=e^{e^{e^{e^{x}}}}$ e) $f(x)=\dfrac{x^{Sen(x)}}{\left(Cos(x)\right)^{x}}$ f) $f(x)=(x+x^2)^{(x+x^2)^{(x+x^2)}}$

Ejercicio 13:

Use las reglas de derivación que correspondan para obtener $\dfrac{dy}{dx}$ en las expresiones de la forma F(x,y)=0, en donde y=f(x) está implícita:

a) $\left(x^2+y^2\right)^2 = Sen(x^2-y^2)$ b) $\log\left(\dfrac{x}{x+y}\right) = x^2+xy+y^2$

c) $x^y = y^x$ d) $\sqrt{x+Sen(x)} = y-Cos(y)$

e) $e^{(x+y)} = \dfrac{e^x+e^{-y}}{e^x-e^{-y}}$ f) $\dfrac{x}{y} - xy = \sqrt[n]{x+y}$

Ejercicio 14:

Resolver los siguientes problemas:

a) ¿Cuál debe ser el valor de a para que la recta tangente a la curva f(x) = ax^2 + x tenga un valor de 2 en el punto P(1,a+1)?

b) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva y = $2x^2$ + 3 que sea paralela a la recta 8x – y + 3 = 0.

c) Determine una ecuación de cada recta tangente a la curva y = x^3 – 3x que sea perpendicular a la recta 2x + 18y – 9 = 0.

d) Determine la ecuación de cada una de las rectas que pasan por el punto P(4,13) y son tangentes a la curva y = $2x^2$ – 1.

e) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva xy = $(14x + y)^3$ en el punto P(2,-32).

f) ¿En que punto de la curva x + $\sqrt{xy}$ + y = 1 es la recta tangente paralela a la recta y+x=0?

g) Hay dos rectas que pasan por el punto (-1,3) que son tangentes a la curva x^2 + $4y^2$ – 4x – 8y + 3 = 0. ¿Cuáles son sus ecuaciones?