# CÁLCULO DIFERENCIAL
## GUIA No 3

## CÁLCULO DE LÍMITES Y CONTINUIDAD

## 1. TEOREMA SOBRE LÍMITES

**Definición:**
El límite de una función f(x), cuando x tiende a $x_o$ es L si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo número real x que pertenece a la vecindad de $x_o$ de radio $\delta(\varepsilon)$ se cumple f(x) pertenece a la vecindad de L de radio $\varepsilon$. Es decir, si $|x - x_o| < \delta(\varepsilon)$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

**Definiciones:**

1) Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L.
2) Si f está definida en x=a, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

**Propiedades:**
Las siguientes propiedades pueden aplicarse siempre y cuando los límites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existan, es decir, sean iguales a números reales y finitos.

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = L \pm M$.
2. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $k \in R$, entonces $\lim\limits_{x \to a} k\left[g(x)\right] = k\left(\lim\limits_{x \to a}\left[g(x)\right]\right) = kM$.
3. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x) \bullet g(x)\right] = L \bullet M$.
4. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x) / g(x)\right] = L / M$, si M≠0.
5. d) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to a}\left[g(x)\right]} = L^M$, si $L^M \in R$.
6. e) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y L>0, entonces $\lim\limits_{x \to a}\left[\log\left(f(x)\right)\right] = \log\left(\lim\limits_{x \to a}\left[f(x)\right]\right) = \log\left(L\right)$, si $L^M \in R$.
7. f) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $m \in R$, entonces $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x)\right]^m = \left(\lim\limits_{x \to a}\left[f(x)\right]\right)^m = L^m$, si $L^m \in R.$,

   si $L^M \in R$.
8. g) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{u \to 0} f(u + a) = L$.

## 2. LÍMITES UNILATERALES

**Ejercicio 1:**

Determine una $\delta>0$ para la $\varepsilon$ dada, tal que si $0 < | x-a | < \delta$ entonces $| f(x) - L | < \varepsilon$ :

a) $\lim\limits_{x\to 3}(2x+4)=10$ ; $\varepsilon=0.01$

b) $\lim\limits_{x\to 1}(3-4x)=7$ ; $\varepsilon=0.02$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-5\right)=-4$ ; $\varepsilon=0.01$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-2x+1\right)=1$ ; $\varepsilon=0.001$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x+2}\right)=-4$ ; $\varepsilon=0.01$

**Ejercicio 2:**

Sea $h(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2+x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$

**Ejercicio 3:**

Sea $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9-x^2} & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ 3-x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

**Ejercicio 4:**

Sea $g(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ |1-x| & \text{si } x > -1 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)$

**Ejercicio 5:**

Sea $f(x)= [x-3]$

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ b) ¿ Existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ?

**Ejercicio 6:**

Sea $f(x) = \begin{cases} kx-3 & \text{si } x \le -1 \\ x^2+k & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Hallar el valor de k, para que exista el siguiente limite $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

**Ejercicio 7:**

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le -2 \\ ax+b & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x-6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

Encuentre los valores de a y b para que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existan.

**Ejercicio 8:**

Sea $f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x < -3 \\ ax + 2b & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ b - 5x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Encuentre los valores de a y b para que $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ existan.

**Ejercicio 9:**

Sea $h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Determinar la existencia de los límites $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ y $\lim\limits_{x \to 0} |h(x)|$

**Ejercicio 10:**

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le -2 \\ ax + 2b & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x\text{-}6 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

Encuentre los valores de a y b para que $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existan.

**Ejercicio 11:**

Los costos de embarque a menudo se basan en una fórmula que produce un costo inferior por kilogramo conforme aumenta la magnitud del embarque. Suponga que x kilogramos es el peso de una remesa, C(x) es el costo total del embarque y está definido como C(x)= $\begin{cases} 0.80x & \text{si } 0 < x \le 50 \\ 0.70x & \text{si } 50 < x \le 200 \\ 0.65x & \text{si } x > 200 \end{cases}$

a) Trace la gráfica de C.

b) Calcule los límites: $\lim\limits_{x \to 50^+} C(x)$; $\lim\limits_{x \to 200^-} C(x)$; $\lim\limits_{x \to 200^+} C(x)$.

# 3. LÍMITES DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

**Indeterminaciones:**

Cuando se calcula un límite utilizando directamente los anteriores teoremas o propiedades puede resultar una expresión inesperada como $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $\frac{0}{0}$, $0\bullet\infty$, $\infty^0$ y $1^\infty$, las cuales se llaman indeterminaciones. Una indeterminación no significa que el límite no exista o no se pueda determinar, sino que la aplicación de las propiedades de los límites tal como las hemos enunciadas no son válidas. En tales casos se requieren estrategias algebraicas especiales.

**Ejercicio 12:**

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

2) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2 - (a-1)x + a}{x^3 - a^3}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$

4) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x - 4}{x-1}$

6) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^4 - a^4 - 4a^3(x-a)}{(x-a)^2}$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{4}{1-x^4} - \frac{3}{1-x^3}$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+2x)^3 - (1+3x)^2}{x^2}$

9) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$

10) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$

11) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x^4 - a^4}$

12) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x^5 - a^5}$

13) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$

14) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$

15) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

16) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sqrt{x^2+x+1} - x - 2}{x^2}$

17) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{a+x} - \sqrt[3]{a-x}}{x}$

18) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{7+2x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2}$

19) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{7x-3}}$

20) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x^2-9}}$

21) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{x}$

22) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

23) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{7x-3}}$

24) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$

25) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$

26) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^2 - \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^2}{x}$

27) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1}$

28) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$

29) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt[m]{x}}{1 - \sqrt[n]{x}}$

30) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+nx)^m - (1+mx)^n}{x^2}$

**Ejercicio 13:**

En la figura 1, se muestran la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$, la recta AB perpendicular al eje X, la recta DE mediatriz del segmento CB. A medida que se desplaza el punto A sobre el eje X, se desplazan los puntos B, E y D. Supóngase que x y h son las longitudes de los segmentos CA y CD, respectivamente. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

**Ejercicio 14:**

En la figura 2, se muestran la gráfica de la función $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{4}$, la recta CB perpendicular al eje X, el punto A=(0,2) y la recta DE mediatriz del segmento AC. A medida que se desplaza el punto B sobre el eje X, se desplazan los puntos C, D y E. Supóngase que x y h son las longitudes de los segmentos FB y FE, respectivamente. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

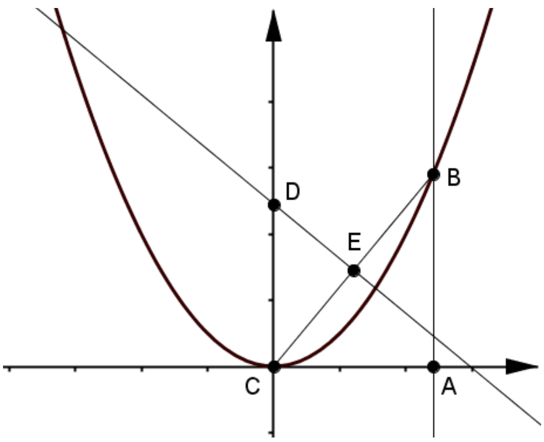


**Figura 1.**

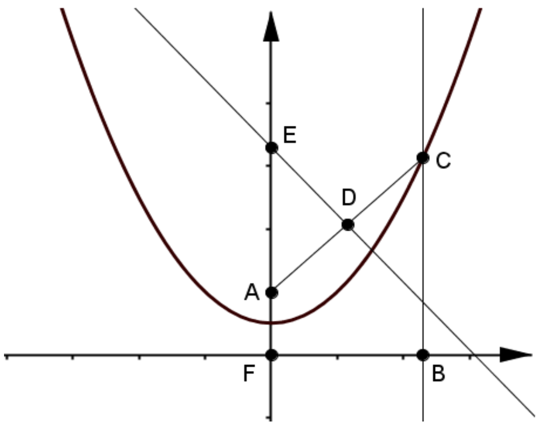


**Figura 2.**

# 4. LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

**Propiedades:**

1) Si $m \neq 0$, entonces $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sen}(mx)}{x} = m$.

2) Si $m \neq 0$, entonces $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \text{Cos}(mx)}{x} = 0$.

**Ejercicio 15:**
Calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sen}(8x) + \text{Sen}(4x)}{\text{Sen}(6x)}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\text{Cos}(x)}}{x^2}$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{ax^2}{1 - \text{Cos}^2(ax)}$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sen}(4x)}{\text{Cos}(3x) - 1}$

5) $\lim_{x \to 0} \text{Csc}(3x)\text{C tg}(2x)$

6) $\lim_{x \to \infty} x\text{Sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

7) $\lim_{x \to 0} x\text{Sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Tan}(x) - \text{Sen}(x)}{x^3}$

9) $\lim_{x \to 0} \text{C tg}(2x)\ \text{C tg}(\pi / 2 - x)$

10) $\lim_{x \to 1} (1 - .x)\text{Tan}(\pi x / 2)$

11) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Cos}(4x) - \text{Cos}(2x)}{x^2}$

12) $\lim_{x \to a} \frac{\text{Cos}(8x) - \text{Cos}(2x)}{4x^3 + 8x^2}$

13) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \text{Sen}(x)} - \sqrt{1 - \text{Sen}(x)}}{x}$

14) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Cos}(mx) - \text{Cos}(nx)}{x^2}$

15) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Tan}(3x) - x}{4x - \text{Sen}(x)}$

16) $\lim_{h \to 0} \frac{\text{Sen}(x + h) - \text{Sen}(x)}{h}$

17) $\lim_{h \to 0} \frac{\text{C tg}(x + h) - \text{C tg}(x)}{h}$

18) $\lim_{h \to 0} \frac{\text{Sec}(u + h) - \text{Sec}(u)}{h}$

19) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Csc}(u + x) - \text{Csc}(u)}{x}$

20) $\lim_{y \to 0} \frac{\text{Sen}^2(x + y) - \text{Sen}^2(x)}{y}$

21) $\lim_{y \to 0} \frac{\text{Tan}^3(a + y) - \text{Tan}^3(a)}{y}$

22) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\text{Csc}(2x)(\text{Sec}(x) - 1)}$

23) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sen}(a + 2x) - 2\text{Sen}(a + x) + \text{Sen}(a)}{x^2}$

24) $\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{\text{Sen}(\pi x)}$

25) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Cos}(a + 2x) - 2\text{Cos}(a + x) + \text{Cos}(a)}{x^2}$

26) $\lim_{x \to 1} \frac{\text{Cos}(\pi x / 2)}{1 - \sqrt{x}}$

27) $\lim_{x \to \pi/2} \frac{1-\text{Sen}(x)}{\pi - 2x}$

28) $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\pi - 2x}{\text{Cos}(x)}$

29) $\lim_{x \to \pi} \frac{\text{Sen}(x)}{x - \pi}$

30) $\lim_{x \to \pi} \frac{\text{Tan}(x)}{x - \pi}$

31) $\lim_{x \to -2} \frac{\text{Tan}(\pi x)}{x + 2}$

32) $\lim_{x \to a} \frac{\text{Sen}(x) - \text{Sen}(a)}{x - a}$

33) $\lim_{n \to a} \frac{\text{Cos}(x) - \text{Cos}(a)}{x - a}$

34) $\lim_{x \to a} \frac{\text{Tan}(x) - \text{Tan}(a)}{x - a}$

35) $\lim_{x \to a} \frac{\text{Ctg}(x) - \text{Ctg}(a)}{x - a}$

36) $\lim_{x \to a} \frac{\text{Sec}(x) - \text{Sec}(a)}{x - a}$

37) $\lim_{x \to a} \frac{\text{Csc}(x) - \text{Csc}(a)}{x^2 - a^2}$

38) $\lim_{x \to \pi/4} \frac{\text{Tan}(x) - 1}{4x - \pi}$

39) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sen}(mx)}{\text{Sen}(nx)}, \ (m \neq n).$

40) $\lim_{x \to \pi/4} \sqrt[4]{\frac{2\text{Cos}(x) - \sqrt{2}}{2\text{Sen}(x) - \sqrt{2}}}$

# 5. LÍMITES INFINITOS Y LÍMITES EN EL INFINITO

## a) Límites Infinitos $(f(x) \to \pm\infty)$

**Definición 1:**
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ significa que, dado un número K real positivo existe un $\delta = \delta(f, K) > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$ entonces $f(x) > K$ .

**Definición (límite lateral):**
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ significa que, dado un número K real positivo existe un $\delta = \delta(f, K) > 0$ tal que si $0 < a - x < \delta$ entonces $f(x) > K$ .

**Definición (límite lateral):**
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ significa que, dado un número K real positivo existe un $\delta = \delta(f, K) > 0$ tal que si $0 < x - a < \delta$ entonces $f(x) > K$ .

**Definición 2:**
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que, dado un número K real negativo existe un $\delta = \delta(f, K) > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$ entonces $f(x) < K$ .

**Definición (límite lateral):**
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ significa que, dado un número K real negativo existe un $\delta = \delta(f, K) > 0$ tal que si $0 < a - x < \delta$ entonces $f(x) < K$ .

**Definición (límite lateral):**
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ significa que, dado un número K real negativo existe un $\delta = \delta(f, K) > 0$ tal que si $0 < x - a < \delta$ entonces $f(x) < K$ .

## b) Límites en el infinito $(x \to \pm\infty)$

**Definición 1:**
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ significa que, dado un $\varepsilon > 0$ existe un $K = K(f, \varepsilon) > 0$ tal que si x>K entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

**Definición 2:**
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ significa que, dado un $P > 0$ existe un $M = M(f, P) > 0$ tal que si x>M entonces $f(x) > P$ .

**Definición 3:**
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ significa que, dado un $P < 0$ existe un $M = M(f, P) > 0$ tal que si x>M entonces $f(x) < P$ .

**Definición 4:**
$\underset{x\to-\infty}{\text{Lím}} f(x) = +\infty$ significa que, dado un $P>0$ existe un $M=M(f,P)<0$ tal que si x<M entonces $f(x)>P$.

**Definición 5:**
$\underset{x\to-\infty}{\text{Lím}} f(x) = -\infty$ significa que, dado un $P<0$ existe un $M=M(f,P)<0$ tal que si x<M entonces $f(x)<P$.

## c) Límites notables:

1) Si $k\in R$, entonces $\underset{x\to\infty}{\text{Lim}} \dfrac{1}{x^k} = \begin{cases} 0, & \text{si } k>0 \\ \infty, & \text{si } k<0 \end{cases}$

2) Sean $a\in R,\ b\in R,\ a\neq b$ y $x\in N$, entonces $\underset{x\to\infty}{\text{Lim}} \sqrt[x]{a^x+b^x} = \max\{a,b\}$.

3) Sean $F_{m/n}(x)=\sqrt[n]{P_m(x)}$ y $G_{k/q}(x)=\sqrt[q]{P_k(x)}$ dos funciones algebraicas definidas como $F_{m/n}(x)=\sqrt[n]{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0}$ y $G_{k/q}(x)=\sqrt[q]{b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\ldots+b_1x+b_0}$, de grados m/n y k/q respectivamente. Entonces:

a) $\underset{x\to\infty}{\text{Lim}} \dfrac{F_{m/n}(x)}{G_{k/q}(x)} = 0,$ si $\dfrac{k}{q}>\dfrac{m}{n}$.

b) $\underset{x\to\infty}{\text{Lim}} \dfrac{F_{m/n}(x)}{G_{k/q}(x)} = \infty,$ si $\dfrac{k}{q}<\dfrac{m}{n}$.

c) $\underset{x\to\infty}{\text{Lim}} \dfrac{F_{m/n}(x)}{G_{k/q}(x)} = \dfrac{\sqrt[n]{a_m}}{\sqrt[q]{b_k}},$ si $\dfrac{k}{q}=\dfrac{m}{n}$.

## d) Asíntotas:

**Definición 1:**
Una recta y=L es una asíntota horizontal de la función f(x) si $\underset{x\to\infty}{\text{Lím}} f(x)=L$ o $\underset{x\to-\infty}{\text{Lím}} f(x)=L$.

**Definición 2:**
Una recta x=a es una asíntota vertical de la función f(x) si $\underset{x\to a}{\text{Lím}} f(x)=\pm\infty$, o $\underset{x\to a}{\text{Lím}} f(x)=\mp\infty$, o $\underset{x\to a}{\text{Lím}} f(x)=\infty$, o $\underset{x\to a}{\text{Lím}} f(x)=-\infty$.

**Definición 3:**
Una recta y=mx+b es una asíntota oblicua de la función f(x) si $\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$. $(m\neq 0)$.

Para hallar el valor de m se calcula el límite $m=\underset{x\to\infty}{\text{Lím}} \dfrac{f(x)}{x}$, y para hallar el valor de b se calcula el límite $b=\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left[f(x)-mx\right]$.

**Ejercicio 16:**
Dado un K, encontrar el delta apropiado para que se cumpla la definición de limite infinito, en cada uno de los siguientes casos:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \infty$ ; $K=10^6$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1-x^2}{(x^2-9)^2} = -\infty$ ; $K=10^5$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2-x}{(x-4)^2} = -\infty$ ; $K=10^4$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x-4}{x}\right)^2 = \infty$ ; $K=2x10^6$

**Ejercicio 17:**
Dado un $\varepsilon$, encontrar el K apropiado para que se cumpla la definición de limite en el infinito, en cada uno de los siguientes casos:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(x-4)^2}{x^2} = 1$ ; $\varepsilon = 10^{-2}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{(3x-4)^2}{2x^2-6} = \frac{9}{2}$ ; $\varepsilon = 10^{-1}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{4x}{\sqrt{9x^2-16}} = \frac{4}{3}$ ; $\varepsilon = 10^{-2}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{6x}{\sqrt{9x^2-16}} = -2$ ; $\varepsilon = 0.02$

**Ejercicio 18:**
Dado un P, encontrar el M apropiado para que se cumpla la definición de limite infinito en el infinito, en cada uno de los siguientes casos:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^2}{x-1} = \infty$ ; $P=10^5$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{4x^2+2x-2}{3x-1} = \infty$ ; $P=10^6$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3+4x^2-6}{2(x^2-16)} = \infty$ ; $P=10^4$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2}{x-2} = \infty$ ; $P=2x10^5$

**Ejercicio 19:**
Encuentre las asíntotas de las siguientes funciones

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^3-9}$

b) $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^3}$

d) $f(x) = \frac{x^3-4x}{(x-9)^2}$

e) $f(x) = \frac{(x-4)^2}{x^2}$

f) $f(x) = \frac{(3x-4)^2}{2x^2-6}$

g) $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$

h) $f(x) = \frac{4x^2+2x-2}{3x-1}$

i) $f(x) = \frac{x^3+4x^2-6}{2(x^2-16)}$

j) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

k) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2-9}}{2}$

l) $f(x) = \frac{4-\sqrt{(x-3)^2-9}}{3}$

m) $f(x) = \frac{3-5\sqrt{4(x+3)^2-6}}{\sqrt{2}}$

n) $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9x^2-1}}{5}$

**Ejercicio 20:**
Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(1+2x)(1+4x)(1+6x)}{(3x-1)(5x-1)(7x-1)}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x-3)^3 - 8x^3}{(2-3x)(3+2x)}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x^2-3} - 5x\right)$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{4x^2+9} - x\right)$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3+1}\right)$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right)$

l) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-1}\right)$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

n) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3+ax^2} - \sqrt[3]{x^3-ax^2}\right)$

o) $\underset{x\to-\infty}{Lím}\, f(x)$ y $\underset{x\to-2}{Lím}\, f(x)$, si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x} & x \le -8 \\ \dfrac{(x+3)|x+2|}{x+2} & -8 < x < -2 \\ \sqrt{9-x^2} & x \ge -2 \end{cases}$

p) $\underset{x\to-4}{Lím}\, f(x)$ y $\underset{x\to-\infty}{Lím}\, f(x)$, si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5x^2+3x+1}}{\sqrt{2x^2-3}} & x \le -4 \\ \dfrac{16-x^2}{5-\sqrt{x^2+9}} & -4 < x < 1 \end{cases}$

**Ejercicio 21:**
Qué valores deben tomar a y b, para que se cumplan las siguientes igualdades:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1} - ax - b\right) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1} - ax - b\right) = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{4(x-2)^2-9}}{3} - ax - b\right) = 0$

**Ejercicio 22:**

Calcular el área del triángulo mixtilíneo OAM, limitado por la parábola $f(x)=b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, el eje OX y la recta x=a, considerándola como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos de base $\frac{a}{n}$, donde $n \to \infty$. (Ver figura 3)

**Ejercicio 23:**

Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar la región limitado por la recta $f(x)=\frac{r}{h}x$, el eje OX y la recta x=h, alrededor del eje X, considerándola como el límite de la suma de los volúmenes de los cilindros que se generan al rotar alrededor del eje X los rectángulos inscritos de alturas $\frac{h}{n}$, donde $n \to \infty$. (Ver figura 4)

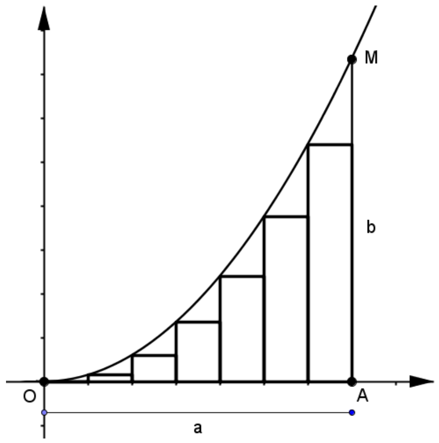

Figura 3

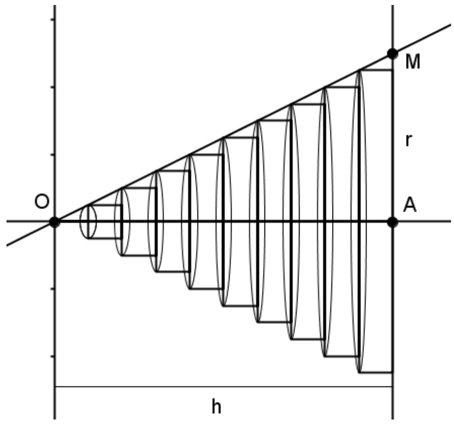

Figura 4

**Ejercicio 24:**

Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar la región limitado por la curva $f(x)=1+\frac{x^2}{20}$, el eje OX y la recta x=10, alrededor del eje X, considerándola como el límite de la suma de los volúmenes de los cilindros que se generan al rotar alrededor del eje X los rectángulos inscritos de alturas $\frac{10}{n}$, donde $n \to \infty$. (Ver figura 5)

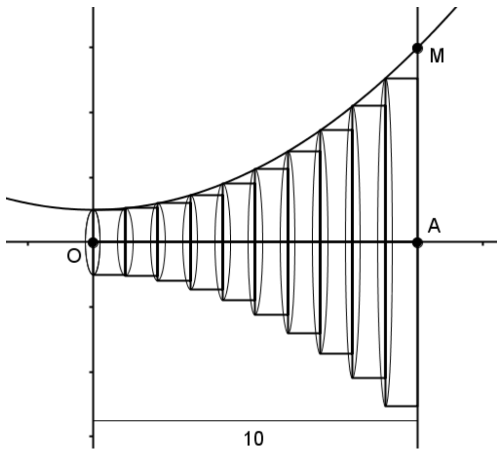

Figura 5

**Ejercicio 25:**
Trace los gráficos de las funciones que satisfacen las siguientes condiciones:

a)
- $\underset{x\to-\infty}{Lím}\ f(x)=a$
- $\underset{x\to-a}{Lím}\ f(x)=+\infty$
- $\underset{x\to a}{Lím}\ f(x)=\mp\infty$
- $\underset{x\to+\infty}{Lím}\ f(x)=+\infty$

b)
- $\underset{x\to-\infty}{Lím}\ f(x)=+\infty$
- $\underset{x\to-a}{Lím}\ f(x)=\pm\infty$
- $\underset{x\to a}{Lím}\ f(x)=\mp\infty$
- $\underset{x\to+\infty}{Lím}\ f(x)=-\infty$

**Ejercicio 26:**
Determine el límite de las siguientes sucesiones:

a) $x_n=\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

b) $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}$

c) $x_n=\left(\dfrac{2+n}{n-2}\right)^n$

d) $x_n=\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

e) $x_n=\sqrt[n]{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n+\left(\dfrac{5}{4}\right)^n}$

f) $x_n=\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$

g) $x_n=\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+...+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

h) $x_n=\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$

i) $x_n=\sqrt[n]{\dfrac{5^n+6^n}{7^n+8^n}}$

j) $x_n=\dfrac{1+9+25+49+...+(2n-1)^2}{4+16+36+...+(2n)^2}$

k) $x_n=\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$

l) $x_n=\dfrac{n!}{n^n}$

m) $x_n=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{1}{2^n}\right)$

n) $x_n=\dfrac{1+4+9+16+...+n^2}{n^3}$

o) $x_n=\left(1+\dfrac{1}{2n+3}\right)^{2n+3}$

p) $x_n=\left(\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$

q) $x_n=\dfrac{n}{n+1}Sen\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

r) $x_n=\dfrac{(n+1)\ln(n)-n\ln(n+1)}{\ln(n)}$

s) $x_n=\dfrac{1}{1\text{x}2}+\dfrac{1}{2\text{x}3}+\dfrac{1}{3\text{x}4}+...+\dfrac{1}{n\text{x}(n+1)}$

t) $x_n=\left(\dfrac{n-a}{n-b}\right)^{\frac{na}{b}}$

v) $x_n=\dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$

w) $x_n=\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{n^2+1}{n}$

# 6. LÍMITES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

**Propiedades:**

3) Si $a \neq 0$, entonces $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$.

4) Si $a \neq 0$, entonces $\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$.

5) Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$.

**Ejercicio 27:**
Calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to\infty} (1 + 3x)^{\frac{5}{3x}}$

2) $\lim_{x\to\infty} \left(1 - \sqrt{3}x\right)^{\frac{2}{x}}$

3) $\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x/2}$

4) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{a + x}{a - x}\right)^{x/a}$

5) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x - 5}{4x}\right)^{4x}$

6) $\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{5x}$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{Sen}(ax) - \text{Sen}(bx)}{a^x - b^x}$

8) $\lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{2}{3x}\right)^{4x}$

9) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\ln(1 + x)}$

10) $\lim_{x\to 0} \frac{(3/2)^x - (2/3)^x}{x}$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{(3/2)^x - (2/3)^x}{\text{Sen}(4x)}$

12) $\lim_{x\to 0} \frac{4^x - 2^x}{6^x - 3^x}$

13) $\lim_{x\to 0} \frac{7^x - 3^x}{\text{Sen}(3x)}$

14) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{Tan}(nx)}{2^x - 1}$

15) $\lim_{x\to 0} \frac{8^x - 4^x}{4x + 5\text{Sen}(5x)}$

16) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(10 + x) - \log(10)}{x}$

17) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(8 + x) - \log(8)}{4x}$

18) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(10 + x) - 1}{3x}$

19) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(10 + x) - \log(10)}{5^x - 3^x}$

20) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e + x) - \ln(e)}{x}$

21) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2^x}{x - 2}$

22) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 3^x}{x - 3}$

23) $\lim_{x\to 4} \frac{x^4 - 4^x}{x^2 - 16}$

24) $\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{x+h} - \left(\frac{a}{b}\right)^x}{h}$

**Ejercicio 28:**

Calcular el área del trapecio mixtilíneo OAMF, limitado por la curva exponencial $f(x)=e^x$, el eje OX y la recta x=a, considerándola como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos de base $\frac{a}{n}$, donde $n \to \infty$. (Ver figura 5).

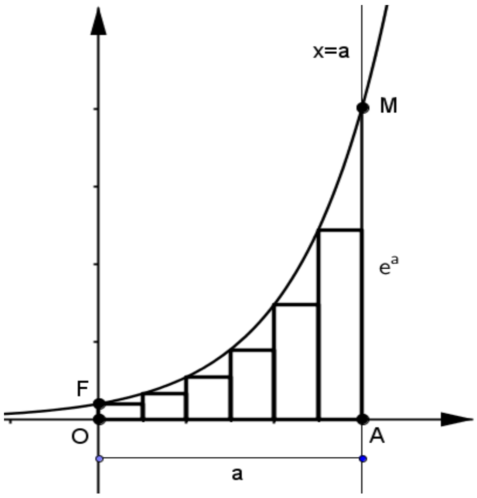


Figura 5.

# 7. CONCEPTO DE CONTINUIDAD

**Definición 1**: Una función f es continua en x=a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, es decir, si satisface las siguientes condiciones:

a) f(a) es un número real finito, es decir, si f está definida en x=a.
b) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.
c) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe y es igual f(a).

**Definición 2**: Una función f es continua por la derecha en x=a si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

a) f(a) existe. b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe. c) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

**Definición 3**: Una función f es continua por la izquierda en x=a si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

a) f(a) existe. b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existe. c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

## a) Tipos de discontinuidad:

a) Una función tiene discontinuidad esencial en x=a, si es discontinua en x=a y $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe.
b) Una función tiene discontinuidad removible en x=a, si es discontinua en x=a y $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

## b) Teoremas sobre funciones continuas:

**Teorema 1:**
Si f y g son dos funciones continuas en x=a, entonces:
a) f+g es continua en x=a.
b) f-g es continua en x=a.
c) fg es continua en x=a.
d) f/g es continua en x=a, si $g(a) \neq 0$.

**Teorema 1:**
Si n es un entero positivo y $f(x) = \sqrt[n]{x}$, entonces:
b) Si n es impar, $f$ es continua en todos los reales.
c) Si n es par, $f$ es continua en todos los reales positivos.

**Teorema 3:**
(Teorema del valor intermedio): Sea $f$ una función continua en un intervalo $[a,b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Si $f(a) < k < f(b)$, entonces existe un número c entre a y b tal que $f(c) = k$.

**Teorema 3:**
(Teorema de Bolzano): Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a, b] tal que f(a)f(b)<0, entonces existe al menos un número real c perteneciente al intervalo (a, b) tal que f(c) = 0; es decir, c es una raíz de f(x)=0.

**Ejercicio 29:**
Determinar si la función dada es continua o discontinua en el punto indicado, en caso de ser discontinua especifique el tipo de discontinuidad:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, en x=-1.

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$, en x=-1.

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$, en x=-2.

d) $f(x) = \dfrac{x^n-1}{x^m-1}$, en x=1.

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & , x \neq 3 \\ -6 & , x = 3 \end{cases}$ en x=3.

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{\ln(2^x)} & , x \neq 0 \\ 2 & , x = 0 \end{cases}$

**Ejercicio 30:**
Redefinir las siguientes funciones (si es posible), para que sean continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{25-x^2}{5-x} & , \text{ si } x \neq 5 \\ 3x+1 & , \text{ si } x = 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{Sen}(3x)}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 3 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & , \text{ si } x > 2 \\ 3+x & , \text{ si } x \leq 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt{5-x}-2}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6+x}-\sqrt{2x+3}}{x-3}$

f) $f(x) = \dfrac{x-1}{4-\sqrt{9x+7}}$

**Ejercicio 31:**
Determinar los valores de A y B para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} Ax+2B, & \text{si } x < -3 \\ 4-x-x^2, & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ Bx-Ax^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2A-3Bx, & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{1-x}{1-x^4}, & \text{si } x \in [-2, \frac{1}{2}) \\ Ax+\sqrt{1+8x} & , \text{ si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} A+B\text{Sen}(x) & , \text{ si } x < -\dfrac{\pi}{2} \\ 2-3\text{Cos}\left(\dfrac{x}{2}\right) & , \text{ si } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ 3A-2\text{Sen}(3x) & , \text{ si } x \geq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} A\text{Sen}(x)-3B\text{Cos}(x) & , \text{ si } x < -\dfrac{\pi}{4} \\ 2+4\text{Cos}\left(\dfrac{8x}{3}\right) & , \text{ si } x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right) \\ 2A\text{Cos}(x)+5B\text{Sen}(3x) & , \text{ si } x \geq \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

**Ejercicio 32:**
Suponga que el costo de envío de una carta se calcula como sigue: 22 centavos de dólar por la primera onza o menos; luego 17 centavos por cada onza (o fracción de onza) por las 11 onzas siguientes. Si x onzas es el peso de una carta y $0<x\leq 12$, exprese la cantidad de centavos del porte de la carta como función de x.

a) Trace la gráfica de esta función.
b) ¿En qué números del intervalo abierto (0,12) es discontinua la función?

**Ejercicio 33:**
La función f se define por $f(x)=\underset{n\to 0}{\text{Lím}}\left(\dfrac{2nx}{n^2-nx}\right)$.

a) Trace la gráfica de f.
b) ¿En qué valores de x es discontinua f?

**Ejercicio 34:**
Dar un bosquejo de la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:

a) Continua en los intervalos $(-\infty,-2]$, $[-2,1)$, $[1,3]$ y $(3,+\infty)$.

b) $\underset{x\to-\infty}{\text{Lím}} f(x)=-3$ c) $\underset{x\to-4}{\text{Lím}} f(x)=0$ d) $\underset{x\to-2^-}{\text{Lím}} f(x)=+\infty$ e) $\underset{x\to-2^+}{\text{Lím}} f(x)=0$

f) $\underset{x\to 0}{\text{Lím}} f(x)=-3$ g) $\underset{x\to 1^-}{\text{Lím}} f(x)=-\infty$ h) $\underset{x\to 1^+}{\text{Lím}} f(x)=2$ i) $\underset{x\to 3^-}{\text{Lím}} f(x)=4$

j) $\underset{x\to 3^+}{\text{Lím}} f(x)=-1$ k) $\underset{x\to 5}{\text{Lím}} f(x)=0$ l) $\underset{x\to+\infty}{\text{Lím}} f(x)=2$

**Ejercicio 35:**
Dada la función f, determinar si se verifica el teorema del valor intermedio en el intervalo dado. En caso de cumplirse, halle el valor c para el cual $f(c)=k$.

a) $f(x) = 2 + x - x^2$, en $[0,3]$, k=1.

b) $f(x) = -\sqrt{100-x^2}$, en $[0,8]$, k=-8.

c) $f(x) = \sqrt{25-x^2}$, en $\left[-\frac{9}{2},3\right]$, k=3.

d) $f(x) = \dfrac{4}{x+2}$, en $[-3,1]$, $k=\dfrac{1}{2}$.

e) $f(x) = \dfrac{5}{2x-1}$, en $[0,1]$, k= 2.

**Ejercicio 36:**
Dada la función f, determinar si se verifica el teorema Bolzano en el intervalo dado. En caso de cumplirse, halle el valor c para el cual $f(c)=0$.

f) $f(x) = x^3 - 6x + 3$, en $[-5,5]$.

g) $f(x) = 4 + 3x - x^2$, en $[2,5]$.

h) $f(x) = x^4 + 7x^3 + x - 8$, en $[-10,5]$.

i) $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x - 5$, en $[-3,3]$.

j) $f(x) = 3x^4 - 21x^3 + 36x^2 + 2x - 8$, en $[-5,5]$.

**Ejercicio 37:**
Demuestre que el teorema del valor medio garantiza que la ecuación $x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$ tiene una raiz entre 1 y 2.

**Ejercicio 38:**
Demuestre que el teorema del valor medio garantiza que la ecuación $x^3 + x + 3 = 0$ tiene una raiz entre -2 y -1.