CÁLCULO DIFERENCIAL
GUIA No 2

1. INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

1. Concepto de límite

1.1 Definición de entorno o vecindad:

Si x=a es un número real (supóngase que x=a está en el eje X), entonces, un entorno o vecindad de x=a de radio δ es un intervalo abierto $(a-\delta,a+\delta) = \{x|\ a-\delta<x<a+\delta\}$. El radio δ es la semiamplitud del intervalo. Se simboliza $V_\delta(a)$. Los números reales x que pertenecen a $V_\delta(a)$ satisface la desigualdad $|x - a|<\delta$. Un entorno reducido de x=a es aquel en donde se excluye el punto x=a y se simboliza $V_\delta^*(a)=\{x|a-\delta<x<a+\delta, x \neq a\}$.

Si y=L es un número real (supóngase que y=L está en el eje Y), entonces, un entorno o vecindad de y=L de radio ε es un intervalo abierto $(L-\varepsilon,L+\varepsilon) = \{y|\ L-\varepsilon<y<L+\varepsilon\}$. El radio ε es la semiamplitud del intervalo. Se simboliza $V_\varepsilon(L)$. Los números reales y que pertenecen a $V_\varepsilon(L)$ satisface la desigualdad $|y - L|<\varepsilon$.

1.2 Definición de punto de acumulación:

Si x=a es un número real en un conjunto A tal que cualquier entorno $V_r(a)$ de x=a de radio r contiene números reales diferente de a, entonces x=a es un punto de acumulación en A.

1.3 Definición de Límite de Cauchy:

1. Sean a y L dos números reales tales que los valores de la función f se acercan al número L cuando los valores de x se acercan al número a, entonces se dice que L es el límite de la función cuando los valores de x se acercan al número x=a. Simbólicamente es $\underset{x\to a}{\text{Lím}}\, f(x) = L$.
2. $\underset{x\to a}{\text{Lím}}\, f(x) = L$ significa o garantiza que: Dado un entorno $V_\varepsilon(L)$ existe un entorno $V_\delta(a)$, donde $\delta = \delta(\varepsilon, f)$, tal que para todo número real x que pertenece a la vecindad $V_\delta(a)$ se cumple que f(x) pertenece a la vecindad $V_\varepsilon(L)$. Es decir, si $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
3. $\underset{x\to a}{\text{Lím}}\, f(x) = L$ significa que: Dado un entorno $V_\varepsilon(L)$ existe un entorno $V_\delta(a)$, donde $\delta = \delta(\varepsilon, f)$, tal que si $d(x,a)<\varepsilon$ entonces $d(f(x),L)<\delta$. Los símbolos d(x,a) y d(f(x),L) representan distancias.
4. $\underset{x\to a}{\text{Lím}}\, f(x) = L$ significa que: Dado un $\varepsilon>0$ existe un entorno $\delta = \delta(\varepsilon, f)>0$, tal que para todo número real x que satisfaga $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Aclaración:
Supóngase que $\lim\limits_{x\to a}\left[mx+b\right]=L$ y se busca generalizar el radio δ de la vecindad $V_\delta(a)$ para un ε cualquiera que es radio de la vecindad $V_\varepsilon(L)$, entonces, es suficiente hallar el intervalo $(f^{-1}(L-\varepsilon),f^{-1}(L+\varepsilon))$ o $(f^{-1}(L+\varepsilon),f^{-1}(L-\varepsilon))$ según sea creciente o decreciente la función f(x)=mx+b, y así se tendrá el entorno $V_\delta(a)$ apropiado de x=a donde $\delta=\left|f^{-1}(L-\varepsilon)-a\right|=\left|f^{-1}(L+\varepsilon)-a\right|=\frac{\varepsilon}{m}$, para que se cumpla la definición de límite. En funciones que no sean de la forma f(x)=mx+b este procedimiento generalmente no funciona, la mayoría de las veces $\delta_1=\left|f^{-1}(L-\varepsilon)-a\right|\neq\left|f^{-1}(L+\varepsilon)-a\right|=\delta_2$, pero además muchas veces no es fácil calcular $\delta_1=\left|f^{-1}(L-\varepsilon)-a\right|$ y $\delta_2=\left|f^{-1}(L+\varepsilon)-a\right|$. En tales casos, es suficiente con acotar el valor del radio δ y expresarlo en función del radio ε.

Téngase en cuenta que al calcular el $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, se centra la atención en el comportamiento de los valores de f cuando se toman valores del domino de f muy cercanos a x=a, por lo tanto, será suficiente analizar este comportamiento para valores de x que se encuentran en un entorno de x=a de semiamplitud inferior a un número ρ dado, generalmente se toma ρ=1. Obsérvese además que existe una función $\varphi(x)$ tal que $\left|f(x)-L\right|=\left|(x-a)\cdot\varphi(x)\right|=\left|(x-a)\right|\cdot\left|\varphi(x)\right|$, por lo que sería suficiente hallar un número real K talque $\left|\varphi(x)\right|\le K$ y así $\delta=\min\left\{\rho,\frac{\varepsilon}{K}\right\}$ sería el radio apropiado de la vecindad $V_\delta(a)$ para que se cumpla la definición de límite.

1.4 Definición de Límite de Heine:

Definición de Sucesión:

Una sucesión de números reales es una función del conjunto N de los números naturales cuyo rango está contenido en el conjunto R de los números reales, es decir, a cada número natural se asigna un número real de manera única.

Una sucesión se representa con la notación $\{x_n\}_n$ o $\{x_n : n\in N\}$. Los elementos o valores de la sucesión se representan x_n o f(n) para $n\in N$.

Convergencia de una sucesión:

Sea $X=\{x_n\}_n$ una sucesión de números reales y L un número real. L es límite de X si para toda vecindad V(L) hay número natural K(V) tal que para todo $n\ge K(V)$, se cumple que los términos xn pertenecen a V(L). También se dice que $X=\{x_n\}_n$ es convergente y que converge a L. Si una sucesión no tiene límite se dice que es divergente.

Definición de Heine: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ significa que para toda sucesión de x que converge hacia el número a $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$ (pertenecientes a dominio de la función f y distintos de a), la sucesión de valores correspondientes de y $\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots\}$ converge al número L.

Nota histórica: La notación moderna del límite de una función se remonta a Bolzano quien, en 1817, introdujo las bases de la técnica épsilon-delta, pero su trabajo no fue conocido mientras él estuvo vivo. Cauchy expuso límites en su Cours d'analyse (1821) y parece haber expresado la esencia de la idea, pero no de una manera sistemática. La primera presentación pública de la técnica Epsilon-delta fue dada por Weierstrass en los 1850 y desde ese momento se ha convertido en el método estándar para trabajar con límites. La notación de límite usando la abreviatura lim con la flecha debajo se debe a Hardy, presentada en su libro A Course of Pure Mathematics en 1908.

1.5 Límites laterales:

1. Definición de límite por la derecha: Se dice que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, si y solo si, para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<x-a<\delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
2. Definición de límite por la izquierda: Se dice que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = M$, si y solo si, para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<a-x<\delta$ entonces $|f(x) - M| < \varepsilon$.
3. Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L.

Aclaración:
Observe que para garantizar la existencia del límite L cuando x se acerca al número x=a no se requiere que la función esté definida en x=a, se requiere que los límites laterales sean iguales.

1.6 Teoremas sobre límites:

1. Teorema de unicidad: Sea f una función de variable real. Si f tiene límite en x=a, entonces éste único. Es decir, si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = M$ entonces L=M.
2. Teorema de compresión (Encaje o Sándwich): Sean f, g y h funciones reales definidas en un conjunto A, x=a un punto de acumulación en A. Si $f(x) \le g(x) \le h(x)$ en el conjunto A y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

1.7 Teoremas de Divergencia:

Sea f una función definida en un conjunto A, x=a un punto de acumulación en A y L un número real, entonces:

1. La función f no tiene límite L en x=a si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_n$ en A, con $x_n \neq a$ para todo $n \in N$, tal que la sucesión $\{x_n\}_n$ converge al número a, pero la sucesión $f(x_n)$ no converge al número L.
2. La función f no tiene un límite en x=a si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_n$ en A, con $x_n \neq a$ para todo $n \in N$, tal que la sucesión $\{x_n\}_n$ converge al número a, pero la sucesión $f(x_n)$ no converge en R.

2. Ejercicios

Ejercicio 1:
Para cada caso siguiente, determine el valor L al cual tienden los valores de la función f cuando x se acerca al valor a por la izquierda y por la derecha. Complete las tablas.

a) $f(x)=\dfrac{x^3-7x^2+3x-6}{x^3+3x^2-14x+8}$

$x\to 2^-$	1,00000	1,50000	1,75000	1,90000	1,99000	1,99900	1,99990	1,99999	2
f(x)									

$x\to 2^+$	3,00000	2,75000	2,50000	2,10000	2,01000	2,00100	2,00010	2,00001	2
f(x)									

b) $f(x)=\dfrac{x^4+3x^3-x^2+x+12}{x^3+2x^2-8x-15}$

$x\to -3^-$	-4,0000	-3,7500	-3,5000	-3,10000	-3,01000	-3,01000	-3,00100	-3,00001	-3
f(x)									

$x\to -3^+$	-2,00000	-2,50000	-2,75000	-2,90000	-2,99000	-2,99900	-2,99990	-2,99999	-3
f(x)									

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 3} + \sqrt{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - 9}}$

$x\to 3^-$	2,00000	2,50000	2,75000	2,90000	2,99000	2,99900	2,99990	2,99999	3
f(x)									

$x\to 3^+$	4,0000	3,7500	3,5000	3,10000	3,01000	3,01000	3,00100	3,00001	3
f(x)									

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x < 2 \\ \dfrac{x - 2}{x^3 - 8}, & x \geq 2 \end{cases}$

$x \to (\pi/2)^-$									
f(x)									

$x \to (\pi/2)^+$									
f(x)									

e) $f(x) = \dfrac{1 - \mathrm{Sen}(x)}{\pi - 2x}$

$x \to (\pi/2)^-$									
f(x)									

$x \to (\pi/2)^+$									
f(x)									

f) $f(x) = \dfrac{\pi - 2x}{\mathrm{Cos}(x)}$

$x \to (\pi/2)^-$									
f(x)									

$x \to (\pi/2)^+$									
f(x)									

g) $f(x) = \left(\dfrac{2x - 5}{2x + 6}\right)^{3x}$

$x \to 0^-$									
f(x)									

$x \to 0^+$									
f(x)									

h) $f(x) = \dfrac{\log(x) - 1}{x - 10}$

$x \to 10^-$									

f(x)									

$x \to 10^+$									
f(x)									

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(x)+1}{x-6}, & x \le 10 \\ \dfrac{\sqrt{x-9}-1}{x-10}, & x > 10 \end{cases}$

$x \to 10^-$									
f(x)									

$x \to 10^+$									
f(x)									

Ejercicio 2:

Determine un $\delta>0$ apropiado para el ε dado, tal que si $|x-a|<\delta$ se cumpla que $|f(x)-L|<\varepsilon$, y escriba la vecindad $V_\delta(a)$ para el δ encontrado.

a) $\lim\limits_{x\to 3}(2x+4)=10$; $\varepsilon=0.01$

b) $\lim\limits_{x\to 1}(3+4x)=7$; $\varepsilon=0.02$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5)=-4$; $\varepsilon=0.01$

d) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+1)=1$; $\varepsilon=0.001$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)=2$; $\varepsilon=0.05$

f) $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-4x-10)=5$; $\varepsilon=0.02$

g) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^4-10x^2-3)=5$; $\varepsilon=0.1$

h) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{2x+5}\right)=\dfrac{3}{11}$; $\varepsilon=0.02$

i) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2-4}{x+2}\right)=-4$; $\varepsilon=0.01$

j) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x^2-16}{4-x}\right)=-8$; $\varepsilon=0.2$

k) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4^x-1}{2^x-1}\right)=5$; $\varepsilon=0.2$

l) $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{2}\right)=3$; $\varepsilon=0.1$

m) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}+8}{5}\right)=2$; $\varepsilon=0.3$

n) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\log(x)+9}{2}=5$; $\varepsilon=0.2$

o) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{1+\mathrm{Sen}(x)}{1-\mathrm{Cos}(x)}\right)=2$; $\varepsilon=0.1$

p) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\left(\dfrac{\mathrm{Tan}(x)+5}{\mathrm{Tan}(x)+2}\right)=2$; $\varepsilon=0.2$

Ejercicio 3:
Para cada una de las siguientes funciones, calcule $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y determine un $\delta>0$ apropiado para el ε dado de tal manera que se cumpla la definición de límite. Escriba la vecindad $V_\delta(a)$ para el δ encontrado.

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{14-x}{2}, & x<\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x^2-6x+28}{4}, & x\geq\dfrac{3}{2} \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{(x-2)^3}{5}, & x\leq 3 \\ 1+\dfrac{(x-4)^2}{2}, & x>3 \end{cases}$

Ejercicio 4:
Determinar una condición sobre $|x-1|$ para asegurar que se cumplan las siguientes desigualdades:

a) $|x^2-1|<\dfrac{1}{2}$

b) $|x^2-1|<\dfrac{1}{1000}$

c) $|x^2-1|<\dfrac{1}{n}$

d) $|x^3-1|<\dfrac{1}{n}$

Ejercicio 5:
Para cada uno de los siguientes casos, encuentre el menor número racional K para el cual se cumple que $|\varphi(x)|\leq K$ en el intervalo dado.

a) $\varphi(x)=2x-3$, en el intervalo (2,4).

b) $\varphi(x)=7-3\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2$, en el intervalo (1,3).

c) $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$, en el intervalo (3,5).

d) $\varphi(x)=27x-x^3$, en el intervalo (2,4).

e) $\varphi(x)=\dfrac{15(x+3)}{x+5}$, en el intervalo (4,6).

Ejercicio 6:
Dada una función φ monótona en un intervalo (a,b), para determinar un valor de K tal que $|\varphi(x)|\leq K$ para todo x en el intervalo (a,b), es suficiente evaluar $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$, y $K=\max\{\varphi(a),\varphi(b)\}$. Es importante crear la habilidad de probar la monotonía de una función en un intervalo. Demuestre que:

a) $f(x)=x^3-10x^2+32x-32$ es creciente en el intervalo (4,6).

b) $f(x)=x^3-15x^2+54x$ es decreciente en el intervalo (3,6).

c) $f(x)=x^4-12x^3+36x^2$ es creciente en el intervalo (0,3).

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 8$ es decreciente en el intervalo (1,3).

Ejercicio 7:

Demuestre los siguientes límites, es decir, dado un ε>0 cualquiera, encuentre un δ apropiado, (generalícelo o acótelo en función de ε), para que se cumpla la definición de límite.

a) $\underset{x\to -1}{\text{Lím}}(9 + 3x) = 6$

b) $\underset{x\to 2}{\text{Lím}}\left(\dfrac{2 + 3x}{5}\right) = \dfrac{8}{5}$

c) $\underset{x\to a}{\text{Lím}}(mx + b) = am + b$

d) $\underset{x\to a}{\text{Lím}}(x^3) = a^3$

e) $\underset{x\to 1}{\text{Lím}}(9x^2 - 3x) = 6$

f) $\underset{x\to 3}{\text{Lím}}\left(\dfrac{x^2 + 3x}{6}\right) = 3$

g) $\underset{x\to 1}{\text{Lím}}\left(\dfrac{9x + 4}{x + 1}\right) = \dfrac{13}{2}$

h) $\underset{x\to 3}{\text{Lím}}\left(\dfrac{1 + 3x}{6 - x}\right) = \dfrac{10}{3}$

i) $\underset{x\to 3}{\text{Lím}}\left(\dfrac{7x + 3}{x + 1}\right) = 6$

j) $\underset{x\to 4}{\text{Lím}}\left(\dfrac{x^2 - 16}{x - 4}\right) = 8$

k) $\underset{x\to 4}{\text{Lím}}\left(\dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}\right) = 2$

l) $\underset{x\to 2}{\text{Lím}}\left(\dfrac{x^3 - 8}{x - 2}\right) = 12$

m) $\underset{x\to 16}{\text{Lím}}\sqrt{x} = 4$

n) $\underset{x\to 8}{\text{Lím}}\sqrt[3]{x} = 2$

o) $\underset{x\to a}{\text{Lím}}\sqrt{x} = a$

p) $\underset{x\to a}{\text{Lím}}\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$

q) $\underset{x\to -1}{\text{Lím}}(9 + 3x - 6x^2 - 3x^3) = 3$

r) $\underset{x\to 2}{\text{Lím}}(2 - 14x + 9x^2 + 2x^3 - x^4) = 10$

s) $\underset{x\to 2}{\text{Lím}}(x^2 - 4x)^2 = 16$

t) $\underset{x\to \frac{5}{2}}{\text{Lím}}(6x^4 - 69x^3 + 291x^2 - 528x + 349) = 4$

u) $\underset{x\to 0}{\text{Lím}}\, x\text{Sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

v) $\underset{x\to a}{\text{Lím}}\,\text{Sen}(x) = \text{Sen}(a)$

w) $\underset{x\to a}{\text{Lím}}\,\text{Cos}(x) = \text{Cos}(a)$

x) $\underset{x\to 0}{\text{Lím}}\dfrac{x}{1+\text{Sen}^2(x)} = 0$

y) $\underset{x\to 10}{\text{Lím}}\log(x) = 1$

z) $\underset{x\to 0}{\text{Lím}}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Ejercicio 8:

$\underset{x\to 3}{\text{Lím}}\left(\dfrac{x + 6}{x^4 - 4x^3 + x^2 + x + 6}\right) = -1$.

a) Encuentre una función $\varphi = \varphi(x)$ tal que $\dfrac{x+6}{x^4 - 4x^3 + x^2 + x + 6} + 1 = (x\text{-}3)\varphi(x)$.

b) Encuentre el menor entero K talque $|\varphi(x)| \le K$ cuando $|x-3| < \dfrac{1}{4}$.

c) Si elegimos $\delta = \min\left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{\varepsilon}{M}\right\}$, ¿Cuál es el menor entero M que podemos utilizar?

d) ¿Qué relación hay entre K y M?

Ejercicio 9:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{8x^4 + 3x^3 + 8x + 21}{x^4 + x^2 + 1}\right) = 9 .$$

a) Encuentre una función $\varphi = \varphi(x)$ tal que $\dfrac{8x^4 + 3x^3 + 8x + 21}{x^4 + x^2 + 1} - 9 = (x\text{-}2)\varphi(x)$.

b) Encuentre el menor entero K talque $|\varphi(x)| \le K$ cuando $|x-2| < 1$.

c) Si elegimos $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{M}\right\}$, ¿Cuál es el menor entero M que podemos utilizar?

d) ¿Qué relación hay entre K y M?

Ejercicio 10:
Demuestre que los siguientes límites no existen:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{Sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{Sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$

Ejercicio 11:
Resuelva los siguientes problemas:

a) Sea $h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$

b) Sea $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ 3 - x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Calcular: I) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ II) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ III) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

c) Sea $g(x) = \begin{cases} |x-1|, & \text{si } x < -1 \\ 0, & \text{si } x = -1 \\ |1-x|, & \text{si } x > -1 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to -1^{+}} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to -1^{-}} g(x)$.

d) Sea $f(x) = [x-3]$

I) Calcular $\lim\limits_{x\to 4^{+}} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 4^{-}} f(x)$ II) ¿ Existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$?

e) Sea $f(x) = \begin{cases} kx-3 & \text{si } x \le -1 \\ x^2+k & \text{si } x > -1 \end{cases}$. Hallar el valor de k, para que exista el límite $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

f) Sea $h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Determinar la existencia de los límites $\lim\limits_{x\to 0^{-}} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^{+}} |h(x)|$.

g) Sea $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

Determinar la existencia de los límites $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

h) Sea $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$

Determinar la existencia de los límites $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

i) Los costos de embarque a menudo se basan en una fórmula que produce un costo inferior por kilogramo conforme aumenta la magnitud del embarque. Suponga que x kilogramos es el peso de una remesa, C(x) es el costo total del embarque y está definido como $C(x) = \begin{cases} 0.80x, & \text{si } 0 < x \le 50 \\ 0.70x, & \text{si } 50 < x \le 200 \\ 0.65x, & \text{si } x > 200 \end{cases}$

I) Trace la gráfica de C.

II) Calcule los límites: $\lim\limits_{x\to 50^{+}} C(x)$; $\lim\limits_{x\to 200^{-}} C(x)$; $\lim\limits_{x\to 200^{+}} C(x)$.

Ejercicio 12:

Resuelva los siguientes problemas:

a) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le -2 \\ ax+2b & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x\text{-}6 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

Encuentre los valores de a y b para que los límites $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existan.

b) Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{2}, & \text{si } x \le -3 \\ ax+b, & \text{si } -3 < x < 2 \\ \dfrac{2x-x^2}{3} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

Encuentre los valores de a y b para que los límites $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existan.

c) Sea $f(x) = \begin{cases} 2x-a & \text{si } x < -3 \\ ax+2b & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ b-5x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Encuentre los valores de a y b para que los límites $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existan.

d) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2+3ax-b, & x < -1 \\ \dfrac{\sqrt{2x^2-1}-x^2}{1-x^2}, & -1 \le x \le 1. \\ bx+3a-2, & x > 1 \end{cases}$

¿Qué valores deben tomar a y b, para que los límites $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existan.

e) Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3ax-b}{4}, & x < -2 \\ \dfrac{\sqrt{2x^2+1}-x^2+1}{4-x^2}, & -2 \le x \le 2. \\ \dfrac{x+3a-2b}{3}, & x > 2 \end{cases}$

¿Qué valores deben tomar a y b, para que los límites $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existan.

Ejercicio 13:
Calcule los siguientes límites laterales:

a) $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ para $f(x) = |x+4|$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ para $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ para $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ para $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}$

e) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ para $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

f) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ para $f(x)=\dfrac{|x|}{x}-x|x|$

g) $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$ para $f(x)=[x]$, $n\in Z$.

h) $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$ para $f(x)=[x]$, $n\in Z$.

i) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ para $f(x)=[x]+[-x]$

j) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ para $f(x)=\dfrac{x^4-1}{1-x|x|}$

k) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ para $f(x)=|x|^3\left(x+1-\dfrac{2}{x}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ para $f(x)=\dfrac{x^2-|x-1|-1}{|x-1|}$.

m) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ para $f(x)=\dfrac{\big|\,|2+x|-3\,\big|-2}{x^2-9}$.

n) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ para $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{|x-1|}$.

o) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ para $f(x)=\sqrt{x-[x]}$.

p) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ para $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{|x-2|}$.

Ejercicio 14:
Encuentre los valores de a para los cuales existen los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to a}[x]$

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to a}\left(x-[x]\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, si $f(x)=\begin{cases} ax+11, & x<3 \\ x^2-8x+16, & x>3 \end{cases}$

Ejercicio 15:
Use el teorema de compresión para demostrar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} x\operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} x^2\operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} x^4\operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{Sen}(x)}{x} = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{Cos}(x) - 1}{x} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to \pi} (\pi - x)\operatorname{Cos}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\operatorname{Sen}(x)}{2 - 2\operatorname{Cos}(x)} = 1$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}} = 0$

Ejercicio 16:
¿Para que valores de a se cumplen las siguientes igualdades:

a) $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{Cos}(x) = \lim\limits_{x \to a} \operatorname{Sen}(x)$

b) $\lim\limits_{x \to a} \frac{2\sqrt{2}\,(\pi - x)}{3\pi} = \lim\limits_{x \to a} \operatorname{Sen}(x)$