



REPASO DE PRECÁLCULO

EJERCICIOS

Ejercicio 1:

Determinar campo de extensión, asíntotas y gráficas de las siguientes ecuaciones:

- a) $x^2y - xy - 2y - 1 = 0$ b) $xy^2 + xy - 2x - 2 = 0$ c) $x^2y - x^2 - 4xy + 4y = 0$
d) $xy^2 + 2xy - y^2 + x = 0$ e) $x^2y - x^2 + xy + 3x = 2$ f) $x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0$
g) $x^3 - xy^2 + 2y^2 = 0$ h) $y^2 + x^2y - x^2 = 0$ i) $x^2y - 4y + x = 0$
j) $x^2 - x + xy + y - y^2 = 0$ k) $4x^2 + 4y^2 - 16 = 0$ l) $4x^2 - 25y^2 - 100 = 0$
m) $(x-2)^2 - y + 4x = 0$ n) $(y-2)^2 - x + 4y = 0$ o) $|x| + |y| = 4$

Ejercicio 2:

Graficar las siguientes ecuaciones:

- a) $9x^2 - 4y^2 = 0$ b) $x^3 - x^2y - 2xy^2 = 0$
c) $x^2 + 2xy + y^2 = 1$ d) $6x^2 + xy - 2y^2 + 7x + 7y = 3$
e) $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 4x + 4y$ f) $x^3 - x^2y - xy + y^2 = 0$
g) $x^2y^2 - 4x^3 + 4xy^2 - y^4 = 0$ h) $x^2y + x^2 - xy^2 + xy + 2x = 0$
i) $x^3 + x^2 + 2xy^2 + 2y^2 = 4x + 4$ j) $12xy + 3x^2y - 4xy^2 - x^2y^2 = 0$

Ejercicio 3:

Hallar los puntos de intersección de los siguientes pares de curvas:

- a) $x - y^2 = 0$; $2x - y - 6 = 0$. b) $x^2 + y^2 = 9$; $y^2 = 3x$.
c) $y - x^2 = 0$; $x - y^2 = 0$. d) $x^2 - y^2 = 4$; $16x^2 + 9y^2 = 144$
e) $x^2 + y^2 = 9$; $xy = 1$. f) $x^2 + y^2 = 4$; $3x - y - 8 = 0$.
g) $x^2 - y^2 = 9$; $3y + x = 0$. h) $x^2 + y^2 = 1$; $y - |x| = 0$.
i) $y = 14 - x^2$; $y = |x|$. j) $y = 2\text{Cos}(x/2)$; $y = \text{Sen}(2x)$.

Ejercicio 4:

Demuestre por inducción:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}$

d) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

e) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

f) $\sum_{k=1}^n 5^{k-1} = \frac{5^n - 1}{4}$

g) $\sum_{k=1}^n k5^k = \frac{5 + (4n-1)5^{n+1}}{16}$

h) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$

i) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ (n es entero mayor que 2)

j) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

k) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^n n^2 = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2}$

l) $(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

m) $5^{2n} - 1$ es múltiplo de 24. (n es entero positivo)

n) $10^{n+1} - 9n - 10$ es múltiplo de 81. (n es entero positivo)

Ejercicio 5:Halle los valores de m en la ecuación $2mx^2 - 4mx + 5m = 3x^2 + x - 8$, para los cuales el producto de sus raíces es igual al doble de su suma.**Ejercicio 6:**

Encuentre los valores de a y b que hagan válidas las siguientes factorizaciones:

a) $x^4 - 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81 = (x^2 + ax + 9)(x^2 + bx + 9)$.

b) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 = (x^2 + ax + 4)(x^2 + bx + 4)$.

Ejercicio 7:

Factorice los siguientes polinomios:

- | | |
|----------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $x^4 + 64.$ | 2) $x^5 - 1.$ |
| 3) $x^6 - 1.$ | 4) $x^8 - 256.$ |
| 5) $x^5 + 32.$ | 6) $x^6 + 64.$ |
| 7) $25y^2 - 9x^2y^2 + 9x^2 - 30xy.$ | 8) $x^2 + 4x + 1$ |
| 9) $4x^4y^4 + x^2y^2 + 9.$ | 10) $x^3 + 7x - 8.$ |
| 11) $4x^4 - 9x + 5.$ | 12) $3x^5 - 10x^3 - 16.$ |
| 13) $x^2 + x - y^2 + 5y - 6.$ | 14) $x^3 + 7x - 8.$ |
| 15) $2x^5 + 3x^3 - y - 4.$ | 16) $x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 27x + 81.$ |
| 17) $x^4 + 5x^3 + 25x^2 + 125x + 625.$ | 18) $2x^2 + 3xy - 2x - 2y^2 + 6y - 4$ |

Ejercicio 8:

Racionalice las siguientes expresiones:

- | | | |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 1) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ | 2) $\frac{1}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{y}}$ | 3) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{xy}+\sqrt{y}}$ |
| 4) $\frac{x}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}$ | 5) $\frac{1}{\sqrt[5]{5}-\sqrt[3]{3}}$ | 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[3]{4}}$ |
| 7) $\frac{x^2-y^2}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{y-1}}$ | 8) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$ | 9) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}}$ |

Ejercicio 9:

Halle las soluciones de las siguientes ecuaciones:

- | | |
|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 1) $x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120 = 0.$ | 2) $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 4x - 4 = 0.$ |
| 3) $x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 4x - 24 = 0.$ | 4) $4\sqrt{x+1} = 2\sqrt{4x-2}.$ |
| 5) $\sqrt{x^2+2}+10 = \sqrt{2x^2-8}.$ | 6) $\sqrt{2x+8}+\sqrt{2x+5} = \sqrt{8x+25}.$ |

Ejercicio 10:

Halle las soluciones de las siguientes ecuaciones:

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(2x) - 1 = 0$ | 2) $3\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{Ctg}(x) = 5\operatorname{Csc}(x)$ |
| 3) $1 - \cos(\pi - x) + \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi + x}{2}\right) = 0$ | 4) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x) + 1 = 0$ |
| 5) $\operatorname{Sen}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ | 6) $\operatorname{ArcTan}(x) + \operatorname{ArcSen}(x) = \frac{\pi}{2}$ |
| 7) $\operatorname{ArcCos}(2x) - \operatorname{ArcCos}(x) = \frac{\pi}{3}$ | 8) $\operatorname{ArcTan}(3x) - \operatorname{ArcTan}(x) = \operatorname{ArcTan}\left(\frac{1}{2}\right)$ |

Ejercicio 11:

Halle las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 + 3x^2 + 7x + 21 = 0$

b) $x^3 + 2x - 9 = 0$

c) $8x^3 + x^2 + 72x + 9 = 0$

d) $x^6 + 3x^2 - 1 = 0$

e) $3x^3 - 7x^2 - 30x + 70 = 0$

f) $x^6 + 4x^4 + 1 = 0$

g) $x^{2/5} + 2 - i = 0$

h) $x^{5/6} - i + 1 = 0$

i) $x^{3/8} + 2 - 3i = 0$

j) $x^8 + 256 = 0$

k) $2x^4 + \sqrt{3} - i = 0$

l) $2x^8 - 1 + i\sqrt{3} = 0$

Ejercicio 12:

Halle las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$

c) $5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x$

d) $2^x + (0.5)^{2x-3} - 6(0.5)^x = 1$

e) $6 \times 3^{2x} - 13 \times 6^x + 6 \times 2^{2x} = 0$

f) $5^{x-2} \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}} = 4$

g) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

h) $\log^2(x) + \log(x) + 1 = \frac{7}{\log(x) - 1}$

i) $\log_5\left(5^{\frac{1}{x}} + 125\right) = \log_5(6) + 1 + \frac{1}{2x}$

j) $\log(x^{\log(x)}) = 1$

k) $x^{\log(x)-1} = 100$

l) $\log_4 \log_2 \log_3(2x-1) = \frac{1}{2}$

m) $\log(x^{\log(x)}) = 1$

n) $\frac{1}{5 - \log(x)} + \frac{2}{1 + \log(x)} = 1$

Ejercicio 13:

Halle dominio, rango, inversa y gráfica de las siguientes funciones: (Restringir el dominio para el caso de las funciones cuadráticas)

a) $f(x) = 6 + 2x$

b) $f(x) = 12 - 5x$

c) $f(x) = 2x^2 + 4x - 10$

d) $f(x) = x^2 + 8x$

e) $f(x) = 3 + \log(x+10)$

f) $f(x) = -2 + 2\log(x)$

g) $f(x) = -1 + \ln(x - 3)$

h) $f(x) = 2 + 3e^{x-1}$

i) $f(x) = -4 + 4e^{-x}$

Ejercicio 14:

En las figuras 1 y 2, se muestra un ciclo de funciones trigonométricas de la forma $f(x) = A\cos(Bx+C)+D$ y $f(x) = A\csc(Bx+C)+D$, respectivamente. Determine las ecuaciones de estas funciones.

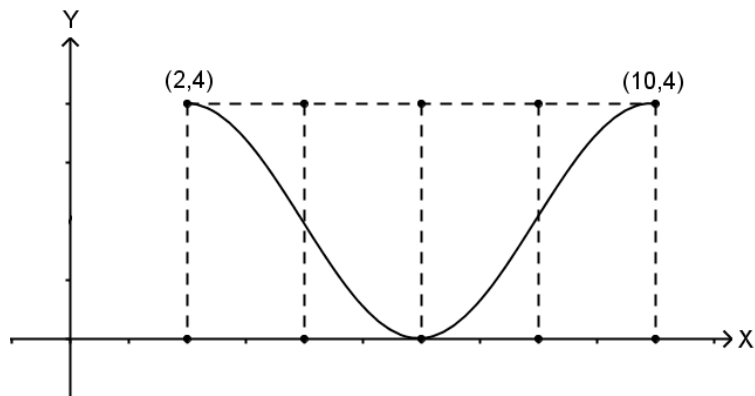


Figura 1.

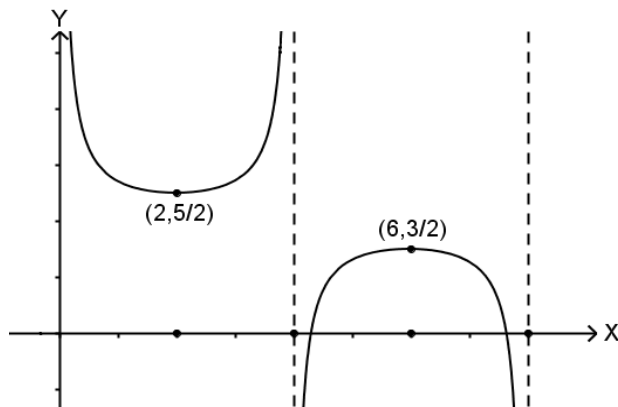


Figura 2.

Ejercicio 15:

Expresa cada función trigonométrica inversa en términos de las otras funciones trigonométricas inversas. Completar la tabla.

	$\text{Sen}^{-1}(f(x))$	$\text{Cos}^{-1}(f(x))$	$\text{Tan}^{-1}(f(x))$	$\text{Cot}^{-1}(f(x))$	$\text{Sec}^{-1}(f(x))$	$\text{Csc}^{-1}(f(x))$
$\text{Sen}^{-1}(x)$	-					
$\text{Cos}^{-1}(x)$	$\text{Sen}^{-1}(\sqrt{1-x^2})$	-				
$\text{Tan}^{-1}(x)$			-			
$\text{Cot}^{-1}(x)$			$\text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$	-		
$\text{Sec}^{-1}(x)$					-	
$\text{Csc}^{-1}(x)$					$\text{Sec}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$	-

Ejercicio 16:

Halle la función inversa de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -3 + 2\text{Sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $f(x) = -3 + \frac{1}{2}\text{Cos}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $f(x) = -3 + \frac{1}{4}\text{Tan}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $f(x) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\text{Ctg}(0.5x + \pi)$

e) $f(x) = 4 - 4\text{Sec}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

f) $f(x) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\text{Csc}(0.5x + \pi)$

Ejemplo 17:

Expresar como un producto:

a) $\text{Sen}(7x) - \text{Sen}(3x)$.

b) $\text{Sen}\left(\frac{3x}{2}\right) + \text{Sen}\left(\frac{7x}{2}\right)$

c) $\text{Cos}\left(\frac{7x}{5}\right) + \text{Cos}\left(\frac{3x}{5}\right)$

d) $\text{Cos}\left(\frac{7x}{3}\right) - \text{Cos}\left(\frac{x}{3}\right)$

Ejemplo 18:

Demuestre que las siguientes ecuaciones son identidades:

a) $\frac{\text{Sen}(6x) - \text{Sen}(4x)}{\text{Cos}(3x)\text{Cos}(2x) - \text{Sen}(3x)\text{Sen}(2x)} = 2\text{Sen}(x)$

b) $\frac{\text{Sen}(5x) + \text{Sen}(3x)}{2\text{Sen}(x)\text{Cos}(3x) - 2\text{Sen}(3x)\text{Cos}(x)} = 4\text{Cos}(x)$

c) $\frac{\text{Sen}(x) + \text{Sen}(2x) + \text{Sen}(3x)}{\text{Cos}(x) + \text{Cos}(2x) + \text{Cos}(3x)} = \text{Tan}(2x)$

d) $\text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right) + \text{Cot}\left(\frac{x}{2}\right) = 2\text{Csc}(x)$

e) $\text{Tan}(3x) - \text{Tan}(x) = \frac{2\text{Tan}(x)\text{Sec}^2(2x)}{1 - \text{Tan}^2(x)\text{Tan}^2(2x)}$

Ejercicio 19:

Obtener un modelo o función en términos de una variable para cada uno de los siguientes enunciados :

- Un número natural se divide en dos sumandos; exprese la suma de sus cubos en términos de uno de los sumandos.
- Un número natural se divide en dos factores. Exprese la suma de sus cuadrados en términos de uno de los factores.

4. Un cilindro se encuentra inscrito en un casquete esférico de radio 10 cm. Expresar el volumen del cilindro en función de su radio.
5. Un cono circular recto se encuentra inscrito en una esfera 10 cm. Expresar el volumen del cono en función de su radio.
6. Un cono circular recto se encuentra circunscrito a una esfera de radio 10 cm. Expresar el volumen del cono en función de su radio.
7. Se tiene un alambre de 72 cm de longitud, con el cual se quieren bordear un cuadrado de área A_1 y un triángulo equilátero de área A_2 . Expresar la suma de las áreas en términos de una variable.
8. Se desea fabricar una caja con capacidad de 72 cm^3 . Los lados de la base han de estar en relación 1:3 ; Exprese la superficie total de la caja en términos de una sus aristas.
9. Se quiere fabricar un recipiente con forma de prisma con base triangular regular. Expresar la superficie total del prisma en términos de la arista de la base, si el volumen debe ser 1000 cm^3 .
10. Un recipiente cilíndrico sin tapa debe tener una capacidad de 1000 cm^3 . Expresar la superficie total del recipiente en términos de: (a) su radio ; (b) su altura.
11. Una empresa que fabrica embudos cónicos para mezcla desea fabricar uno cuya generatriz mida 1.20 metros. Expresar la capacidad del embudo en términos de su altura.
12. El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm, éste triángulo es rotado alrededor de su base y se genera un sólido cónico. Expresar el volumen del cono en función del radio de su base.
13. Un tanque cilíndrico de radio 0.6 metros y altura 1.6 metros se desea proteger con una carpa cónica. Expresar el material gastado en la fabricación de la carpa en función de su altura, si se quiere economizar material.
14. En una página de libro el texto impreso debe ocupar 300 cm^2 . Los márgenes superior e inferior deben ser iguales a 3 cm y los márgenes izquierdo y derecho deben ser iguales a 2.5 cm. Expresar el área de la página en función de uno de sus lados.
15. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado con un semicírculo. Expresar el área de luz de la ventana en función de un de sus lados, si su perímetro es de 5 metros.
16. Se va a fabricar un canal de 2 metros de longitud, de forma que su sección transversal sea un trapecio isósceles cuya base menor y cuyos lados no paralelos miden 30 centímetros, respectivamente. Exprese la capacidad del canal en función del valor del ángulo de inclinación de las caras no paralelas.
17. Un buque pesquero se encuentra a una distancia de 2 km mar adentro del pueblo más cercano de una playa recta y desea llegar a otro punto de la playa a 6 km del primero. Suponiendo que el buque puede andar a una velocidad de 3 km/h y, estando en la playa, la mercancía se puede

transportar en otro tipo de vehículo a una velocidad de 5 km/h. Expresar en función del tiempo la trayectoria que se debe seguirse para que la mercancía llegue a su destino.

18. Se tiene un alambre de 120 cm de longitud, con el cual se quieren bordear un cuadrado de área A_1 , un triángulo equilátero de área A_2 y un círculo de área A_3 . Expresar la suma de las áreas en términos de una variable, si se sabe que la suma de los perímetros del triángulo y el círculo es igual al perímetro del cuadrado.
19. Un tronco de madera (cónico truncado) de 4 metros de altura, tiene 100 cm de radio en su base mayor y 60 cm de radio en su base menor. El tronco es torneado para sacar una viga de sección transversal circular cuya altura sea menor que la del tronco original. Expresar el volumen de la viga en función del radio de su base.
20. En la figura 3, la recta BC es perpendicular al eje X , la recta DE es mediatriz del segmento AC , la ecuación de la parábola es $f(x) = \frac{x^2}{4}$. Sean x y h son las longitudes de los segmentos AB y AD respectivamente. Expresa h en función de x .
21. Dos tanques (A y B) para almacenamiento de petróleo se encuentran mar adentro distanciados 1250 m entre sí. El tanque A se encuentra a una distancia de 500 m de la costa y el tanque B se encuentra a una distancia de 750 m de la costa, la cual es rectilínea como se muestra en la figura 4. Se desea ubicar sobre la costa un tanque C de mayor capacidad que reciba el petróleo almacenado en los tanques A y B mediante tuberías rectilíneas AC y BC . Si x es la distancia de P hasta C , exprese la tubería total que se va a instalar en función de x .

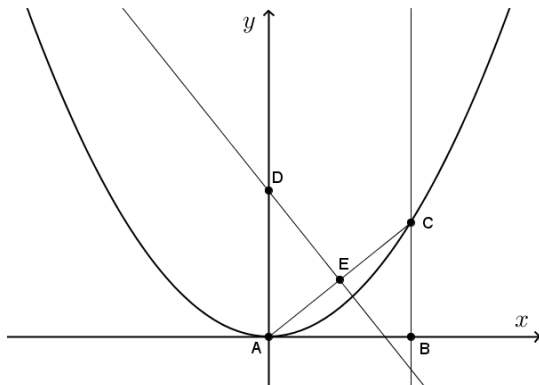


Figura 3.

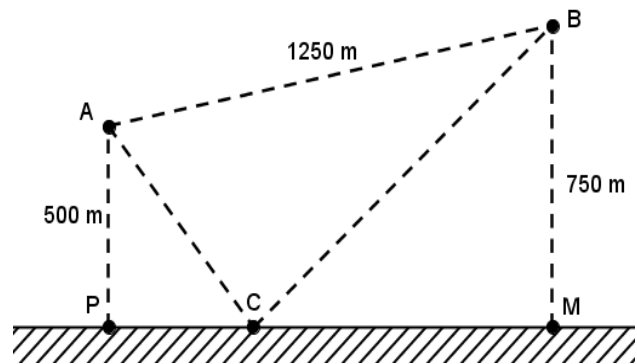


Figura 4.

22. En la figura 5 se muestra un tetraedro que tiene tres aristas que son perpendiculares entre sí y cada una mide 10 cm. Se inscribe un prisma de base triangular que tiene tres caras sobre las tres caras del tetraedro que son perpendiculares entre si. Expresar el volumen del prisma en función de una de sus aristas.
23. En la figura 6 se muestra un tetraedro que tiene tres caras sobre los planos coordenados, y las aristas que coinciden con los ejes coordenados miden 5, 6 y 4 unidades. Se inscribe un prisma de base triangular que tiene tres caras sobre los planos coordenados. Expresar el volumen del prisma en función de una de sus aristas.

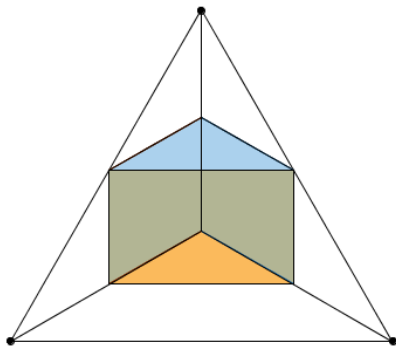


Figura 5

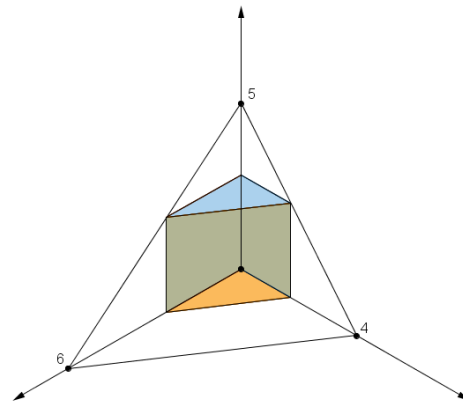


Figura 6

24. Un rectángulo tiene dos vértices sobre la parábola $f(x) = \frac{x^2}{4}$ y los otros dos sobre la parábola $f(x) = 5 - \frac{x^2}{10}$, de tal forma que sus lados son paralelos a los ejes coordenados, como se muestra en la figura 7. Exprese el área del rectángulo en función de la abscisa del punto C.

25. Un depósito horizontal para agua mide 16 m de longitud y sus extremos son trapecios isósceles con una altura de 4 m, base menor de 4 m y base mayor de 6 m, como se muestra en la figura 8. Se vierte agua en el depósito a una tasa de $10 \text{ m}^3/\text{min}$. Exprese el volumen llenado en función de la profundidad del agua.

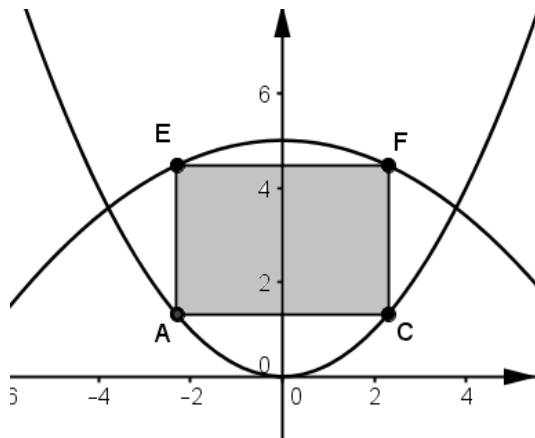


Figura 7.

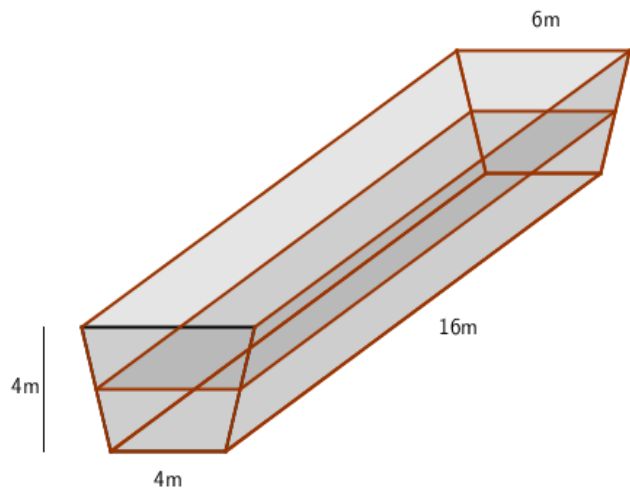


Figura 8.

26. Un rectángulo se inscribe en la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, de tal forma que sus lados son paralelos a los ejes coordenados, como se muestra en la figura 9. Exprese el área del rectángulo en función de la abscisa del punto B.

27. Un triángulo isósceles se inscribe en un círculo de radio 4 cm, como se muestra en la figura 8. Exprese el área del triángulo en función del ángulo θ .

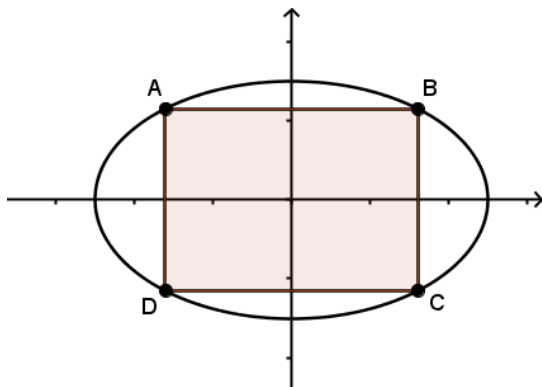


Figura 9.

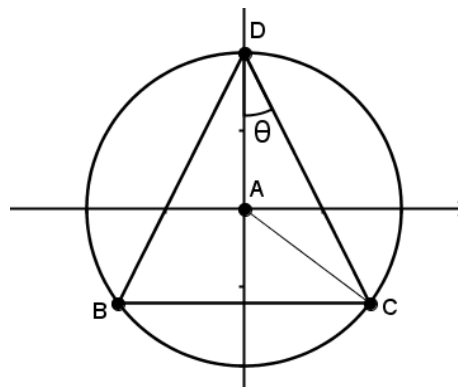


Figura 8.

28. En la figura 9, el triángulo BAC es isósceles con $AB = AC = R$. Exprese la longitud de la cuerda BC en función de R y θ .
29. En la figura 10, una circunferencia está circunscrita a un triángulo ABC de lados a , b y c . Exprese el radio R de la circunferencia en función del ángulo $\angle CAB$.

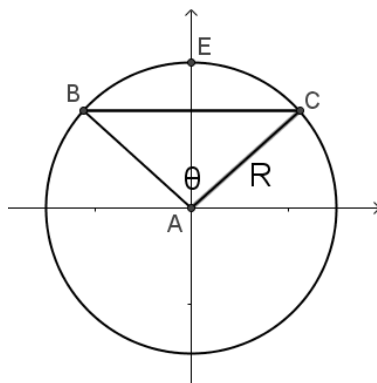


Figura 9

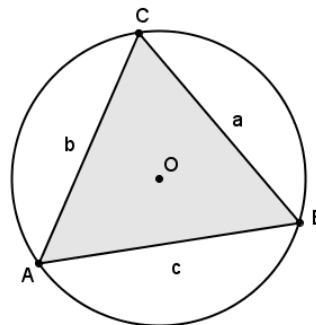


Figura 10

Ejercicio 20:

Encuentre la relación inversa asociada a las siguientes funciones:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = \text{Senh}(2x)$ | b) $f(x) = \text{Cosh}(4x)$ | c) $f(x) = \text{Tanh}(2x)$ |
| f) $f(x) = \text{Coth}(3x)$ | g) $f(x) = \text{Sech}(5x)$ | h) $f(x) = \text{Csch}(3x/2)$ |