ALGEBRA LINEAL
GUIA No 6

TRANSFORMACIONES LINEALES

1. TRANSFORMACIONES – NÚCLEO E IMAGEN

DEFINICION : Sean V y W espacios vectoriales. Una transformación lineal **T** de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un único vector $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface para cada $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ y cada escalar k los siguientes axiomas :
a) $T\,\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.
b) $T(k\mathbf{v}) = k(T\mathbf{v})$
La transformación T satisface los siguientes teoremas:
a) $T(\mathbf{0}_v) = \mathbf{0}_w$.
b) $T(u-v) = T(u) - T(v)$.
c) $T(c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \ldots + c_nT(v_n)$.

SUBESPACIOS ASOCIADOS: Un subespacio de V asociado a T es el Núcleo o Kernel de T. Un subespacio de W asociado a T es la Imagen de T.
a) NUCLEO: Núcleo de T = $N(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$.
b) IMAGEN: Imagen de T = $Im(T) = \{w \in W : w = T(v),\ \text{para } v \in V\}$.

DIMENSIÓN DE N(T) e Im(T): Sea $T:V \to W$ una transformación lineal, m=dim(V), N(T) e Im(T) el núcleo y la imagen de T, respectivamente. Entonces:
a) La dimensión de N(T) se llama nulidad de T y se simboliza $\nu(T)$.
b) La dimensión de la Imagen de T se llama rango de T y se simboliza $\rho(T)$.
c) $\nu(T) + \rho(T) = \dim(V) = m$.

EJERCICIOS

Para cada uno de los siguientes casos (del 1 al 16), determine si la transformación dada de V en W es lineal :

1) $T : R^2 \to R^3$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y, 3y)$

2) $T : R^2 \to R^2$ definida por $T(x, y) = (x, 0)$

3) $T : R^2 \to R^2$ definida por $T(x, y) = (1, y)$

4) $T : R^3 \to R^2$ definida por $T(x, y, z) = (x, y)$

5) $T : R^3 \to R^2$ definida por $T(x, y, z) = (1, z)$

6) $T : R^3 \to R^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

7) $T : R^2 \to R$ definida por $T(x, y) = xy$

8) $T : R^2 \to R^2$ definida por $T(x, y) = (x^2, y^2)$

9) $T : R \to R^n$ definida por $T(x) = (x, x, x, \ldots, x)$

10) $T : R^n \to R$ definida por $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

11) $T : R^4 \to R^2$ definida por $T(x, y, z, w) = (xz, yw)$

12) $T : P_2 \to P_1$ definida por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1x$

13) $T : R \to P_n$ definida por $T(a) = a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n$

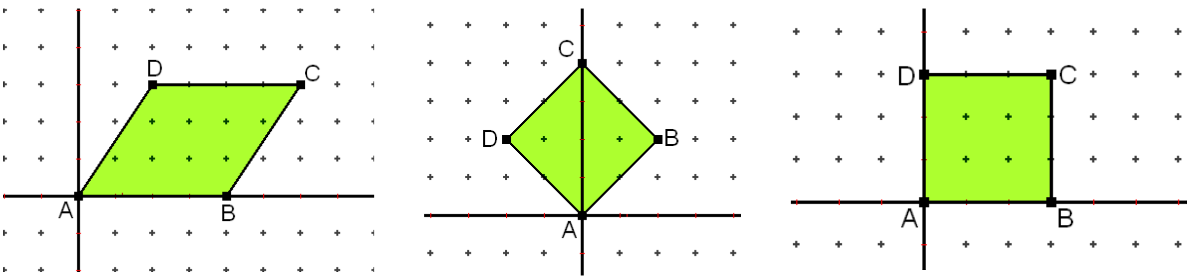
14) $T : D_n \to D_n$ definida por $T(D) = D^2$ (D_n es el conjunto de matrices diagonales de tamaño nxn)

15) $T : D_n \to D_n$ definida por $T(D) = I + D$

16) $T : M_{nn} \to R$ definida por $T(A) = \mathrm{Det}(A)$.

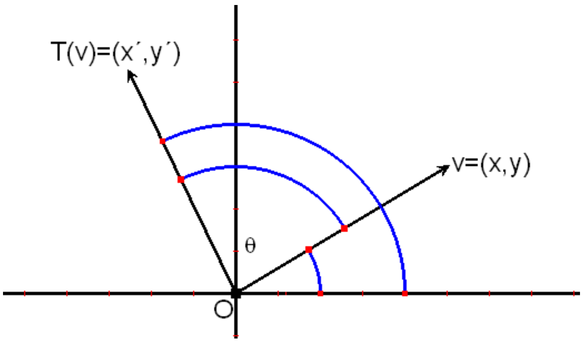
17) Sea $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(x, y) = (-x, -y)$. Describa T geométricamente.

18) $T:R^2 \to R^2$ es una transformación lineal definida como $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y \\ 2x-y \end{bmatrix}$. Grafique la transformación de cada una de las siguientes regiones:



(a) Región 1. (b) Región 2. (c) Región 3.

19) Supóngase que el vector $v=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ en el plano XY se rota un ángulo θ grados en sentido antihorario, resultando el vector $w = T(v) = T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, que se muestra en la figura. Demuestre que $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}(\theta) & -\mathrm{Sen}(\theta) \\ \mathrm{Sen}(\theta) & \mathrm{Cos}(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$



20) Encontrar una transformación lineal de R^2 en el plano $W = \{(x,y,z) : 2x - y + 3z = 0\}$

21) Encuentre la representación matricial A_T de la transformación $T : R^3 \to R^4$ definida por $T(x,y,z) = (x - y, y + z, 2x - y - z , -x + y + 2z)$.

22) Encuentre la representación matricial A_T de la transformación $T : R^3 \to R^3$ definida por $T(x,y,z) = (x + 2y - 3z, x + y + 2z, -3x + 2y - z)$.

23) Sea T una transformación lineal de $R^2 \to R^3$ tal que $T(1, 0) = (1, 2, 3)$ y $T(0, 1) = (-4, 0, 5)$. Encuentre:
(a) $T(2, 4)$ (b) $T(-3, 7)$ (c) $T(x, y)$

24) Sea T una transformación lineal de $R^3 \to R^3$ tal que $T(1,0,0) = (4, 8, -6)$; $T(0,1,0) = (0, 1, 1)$ y $T(0,0,1) = (-4, 3, -4)$.
(a) Hallar $T(1,2,3)$;
(b) Hallar $T(x,y,z)$.

25) Encuentre el Núcleo y la Imagen de la transformación lineal $T:R^3 \to R^3$; definida como $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x-2y-4z \\ 3x-2z \\ 6x-2y-3z \end{pmatrix}$

26) Sea $T:R^3 \to R^4$ definida por $T(x,y,z) = (x-y, y+z, 2x-y-z, -x+y+2z)$. Hallar :

(a) Matriz de la transformación : A_T

(b) Nucleo o Kernel de la transformación : ker(T)

(c) Nulidad de la transformación : $\nu(T)$

(d) Rango de la transformación : $\rho(T)$

27) Sea T: $T:R^3 \to R^3$ lineal definida como $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x-2y-4z \\ 3x-2z \\ 6x-2y-3z \end{pmatrix}$. Encuentre los vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de R^3 tales que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

28) Sea $T:R^3 \to R^3$ definida por $T(x,y,z) = (x-y+2z, 3x+y+4z,5x-y+8z)$. Hallar :

(a) Matriz de la transformación : A_T

(b) Nucleo o Kernel de la transformación : ker(T)

(c) Nulidad de la transformación : $\nu(T)$

(d) Rango de la transformación : $\rho(T)$

29) Sea $T:R^4 \to R^4$ una transformación lineal tal que $T(1,0,0,0) = (4,2,-2,2)$; $T(0,1,0,0) = (1,3,1,-1)$; $T(0,0,1,0) = (0,0,2,0)$ y $T(0,0,0,1) = (1,1,-3,5)$.

a) Hallar $T(2,-3,4,1)$

b) Hallar $T(x,y,z,u)$

c) Hallar A_T.

d) Hallar Ker(T) y nulidad $\nu(T)$.

e) Hallar Im(T) y rango $\rho(T)$.

30) $T:R^2 \to R$ es transformación lineal tal que $T\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=3$ y $T\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=-5$.

a) Hallar Kernel de T y Nulidad de T.
b) Hallar Imagen de T y Rango de T.

31) Sea $T:R^3 \to R$ una transformación lineal tal que $T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=3$, $T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=2$ y $T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=3$.

Hallar T.

32) $T:R^3 \to R$ es transformación lineal tal que $T\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=-4$ y $T\begin{bmatrix}3\\1\\5\end{bmatrix}=-6$.

a) Hallar Kernel de T y Nulidad de T.
b) Hallar Imagen de T y Rango de T.

33) Sea $T:R^2 \to R^3$ una transformación lineal tal que $T\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}$.

a) Hallar $T\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}$.

b) Hallar Ker(T) e Im(T).

34) Sea $T:R^3 \to R^3$ una transformación lineal tal que Ker(T) = $\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$ e Im(T) = $\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}\right\}$. Determinar $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$.

35) Sea $T:V \to W$ una transformación lineal, donde $V=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in R^3 : \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}t, t\in R\right\}$ y $W=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in R^3 : 3x+2y+z=0\right\}$. Hallar $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$.

36) $T:R^3 \to R^3$ es transformación lineal tal que $T\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}$.

a) Hallar Kernel de T y Nulidad de T.
b) Hallar Imagen de T y Rango de T.

37) $T:R^4 \to R^4$ es transformación lineal tal que $T\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\4\\-1\\-1\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\2\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-3\\2\\0\end{bmatrix}$ y

$T\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\1\\-1\\-4\end{bmatrix}$.

a) Hallar Kernel de T y Nulidad de T. b) Hallar Imagen de T y Rango de T.

38) Sea $T:V \to W$ una transformación lineal, donde $V=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in R^3 : \begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&6\\3&-6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ y

$W=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in R^3 : \begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&6\\4&-5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$. Hallar $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$.

39) $T:P_3 \to P_2$ es transformación lineal tal que $T\left[ax^3+bx^2+cx+d\right]=\left[bx^2+cx+d\right]$.
a) Hallar Kernel de T y Nulidad de T.
b) Hallar Imagen de T y Rango de T.

40) $T:M_{22} \to M_{22}$ es transformación lineal definida como $T\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\0&d\end{bmatrix}$.
a) Hallar Kernel de T y Nulidad de T.
b) Hallar Imagen de T y Rango de T.

41) $T:P_2 \to P_3$ es una transformación lineal definida como $T\left[a+bx+cx^2\right]=b-bx+ax^3$.
a) Hallar Kernel de T y Nulidad de T.
b) Hallar Imagen de T y Rango de T.

42) $T:P_3 \to P_1$ es una transformación lineal definida como $T[ax^3+bx^2+cx+d]=(a+c)x-b$.
a) Hallar Kernel de T y Nulidad de T.
b) Hallar Imagen de T y Rango de T.

43) $T:P_3 \to R^3$ es una transformación lineal definida como $T\left[ax^3+bx^2+cx+d\right]=\begin{bmatrix}a-b\\c-a\\b-c\end{bmatrix}$.
a) Hallar Kernel de T y Nulidad de T.
b) Hallar Imagen de T y Rango de T.

44) $T:M_{22} \to M_{22}$ es transformación lineal definida como $T\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b+c+d&a+b+c\\a+b&a\end{bmatrix}$.
a) Hallar Kernel de T y Nulidad de T.
b) Hallar Imagen de T y Rango de T.

45) $T: R^3 \to P_2$ es transformación lineal definida como $T\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = cx^2 + bx + c$.

a) Hallar Kernel de T y Nulidad de T.
b) Hallar Imagen de T y Rango de T.

2. SUBESPACIOS PROPIOS O FUNDAMENTALES

DEFINICION: Sea $T: V \to V$ una transformación lineal. E_λ es un subespacio propio del espacio vectorial V si $E_\lambda = \text{gen}\{v \in V : T(v) = \lambda v\}$, es decir E_λ es el espacio generado por los vectores v de V cuya imagen es un vector paralelo al vector v.

Si A_T es la matriz de la transformación T, entonces E_λ es la solución del sistema homogéneo $(A_T - \lambda I)(v)=0$, el cual tendrá soluciones no triviales cuando $\det(A_T - \lambda I)=0$. El polinomio $P(\lambda)= \det(A_T - \lambda I)=0$ se llama polinomio característico de la transformación o de la matriz A_T. Las raíces del polinomio $P(\lambda)=0$ se llaman valores propios de A_T.

Un número λ es un valor propio o característico de A_T si existe un vector v (no nulo) de V, tal que $T(v) = \lambda v$. El vector v se llama vector propio o característico.

EJERCICIOS

46) Sea A_T la representación matricial de la transformación $T : R^3 \to R^3$ definida por $T(x,y,z) = (x - y + 4z, 3x + 2y - z, 2x + y - z)$.
(a) Encuentre $p(\lambda) = \text{Det}(A_T - \lambda I)$
(b) Encuentre $p(\lambda) = 0$

47) Sea A_T la representación matricial de la transformación $T : R^3 \to R^3$ definida por $T(x,y,z) = (3x + 2y + 4z, 2x + 2z, 4x + 2y + 3z)$.
(a) Encuentre $p(\lambda) = \text{Det}(A_T - \lambda I)$
(b) Encuentre $p(\lambda) = 0$

48) Calcular los valores propios y los vectores propios de las siguientes matrices:

(a) $A = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ (h) $H = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 11 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ i) $I = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

49) Hallar los subespacios propios de R^3 asociados a las siguientes transformaciones lineales de R^3 a R^3:

(a) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 6 \\ -5 & 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (b) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ -10 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(c) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (d) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(e) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (f) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

50) Sea $T:R^4 \to R^4$ una transformación lineal tal que $T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

a) Calcular los valores propios y los vectores propios de A_T.

b) Calcular los subespacios propios de A_T.

51) Sea $T:R^4 \to R^4$ una transformación lineal tal que $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 \\ -3 & 4 & -3 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix}$. Hallar los subespacios propios de R^4 asociados a la transformación T.

52) $T:R^2 \to R^2$ es transformación lineal definida como $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+my \\ 2x-3y \end{bmatrix}$. Encuentre el valor de m para que A= $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}t, t \in R\right\}$ y B= $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}t, t \in R\right\}$ sean subespacios propios asociados de R^2 a T.

53) Demuestre que toda matriz de la forma $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ con $b \neq 0$ tiene dos valores propios reales distintos.

54) Demuestre que toda matriz de la forma $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ tiene los vectores propios $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.

55) Demuestre que una matriz A de tamaño nxn es inversible si, y solo si, sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son diferentes de cero.

3. DIAGONALIZACIÓN

DEFINICIÓN: Dos matrices A_{nn} y B_{nn} son semejantes si existe una matriz C invertible tal que $B = C^{-1}AC$, o también $A = C^{-1}BC$. Existe una transformación lineal que transforma a la matriz A en la matriz B, se llama transformación de semejanza y se simboliza $T(A)= B = C^{-1}AC$.
Si dos matrices A y B son semejantes, sus polinomios característicos y sus valores propios son los mismos.

DEFINICIÓN: Una matriz A_{nn} es diagonalizable si existe una matriz diagonal D_{nn} tal que A sea semejante a D.

TEOREMAS: Sea A una matriz de tamaño nxn, entonces:

a) A es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A, entonces la matriz diagonal D está dada por $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$.
b) Si C es la matriz cuyas columnas son los n vectores propios de A y éstos son linealmente independientes, entonces $D=C^{-1}AC$.
c) Si la matriz A_{nn} tiene n valores propios diferentes, entonces A_{nn} es diagonalizable.

EJERCICIOS

56) Determine si las siguientes matrices son diagonalizables:

(a) $A = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (f) $F = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

57) Encuentre la matriz diagonal D semejante a cada una de las siguientes matrices, en caso de que sea posible:

(a) $A = \begin{pmatrix} -11 & 36 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

58) A, B y C son matrices tamaño nxn tales que A y B son semejantes, B y C son semejantes. Demuestre que A y C son semejantes.

59) Si A es semejante a B, demuestre que det(A) = det(B).

60) Si A es semejante a B, demuestre que A^n es semejante a B^n para cualquier entero positivo n.