ALGEBRA LINEAL
GUIA No 5

ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES

1. ESPACIO VECTORIAL REAL

Un espacio vectorial real V es un conjunto de objetos llamados vectores, junto con dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por un escalar que satisface los siguientes axiomas:

1. Si $\mathbf{a} \in V$ y $\mathbf{b} \in V$, entonces $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in V$.
2. Para todo $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ en V, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.
3. Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}$.
4. Si $\mathbf{a} \in V$, existe un vector $(-\mathbf{a})$ en V tal que $\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
5. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están en V, entonces $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$.
6. Si $\mathbf{a} \in V$, y k es un escalar, entonces $k\mathbf{a} \in V$.
7. Si $\mathbf{a},\mathbf{b} \in V$ y si k es un escalar, entonces $k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$.
8. Si $\mathbf{a} \in V$ y, k y n son escalares, entonces $(k+n)\mathbf{a} = k\mathbf{a}+n\mathbf{a}$.
9. Si $\mathbf{a} \in V$ y si k y n son escalares, entonces $k(n\mathbf{a}) = kn\mathbf{a}$.
10. Para todo $\mathbf{a} \in V$, $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

EJERCICIOS

Para cada uno de los siguientes conjuntos, determinar si son o nó espacios vectoriales:

1) $V = \{ (x,y) \in R^2 : y = 5x + 1, x \in R \}$

2) $V = \{ (x,y) \in R^2 : y = mx$, m es un real fijo, $x \in R \}$

3) $V = \{ (x,y,z) \in R^3 : ax + by + cz = 0$, a,b,c son reales fijos $\}$

4) $V = \{ P_n(x)$: P es un polinomio de grado $\leq n \}$

5) $V = \{ P_n(x)$: P es un polinomio de grado $n \leq 3 \}$

6) $V = \{ f(x)$: f(x) es una función continua en $[0,1] \}$

7) $V = \{ M_{nn}$: M es una matriz de tamaño nxn $\}$

8) $V = \{ A_{nn}$: A es una matriz invertible $\}$

9) $V = \{ (x,y) \in R^2 : y \geq 0 \}$

10) $V = \{ M_{nn}$: M es una matriz diagonal $\}$

11) $V = \{ X$: X es un vector que en el primer cuadrante $\}$

12) $V = \{ (x,y,z) \in R^3 : x = y = z \in R \}$

13)V = { M_{nn} : M es una matriz simétrica }

14)V = { f(x) : f(x) es una función diferenciable en [0,1] }

15)V = { M_{2x2} : M es una matriz de 2x2 con $a_{11} = a_{22} = 1$, a_{12} y $a_{21} \in$ R }

16)V = { f(x) : f(x) es continua en [0,1] con f(0) = 0 y f(1) = 1 }

17)V = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} : \text{a y b son reales} \right\}$

18)V = { (a,b,a-b) : a y b son reales }

19)V = { f(x) continuas y derivables : f´(x) – 4f(x) = 0}

20)V = { f(x) continuas y derivables : f´´(x) + 4f(x) = 0 }

2. SUBESPACIO VECTORIAL

Sea V un espacio vectorial y H un subconjunto de V, decimos que H es un subespacio vectorial de V si cumple las dos reglas de cerradura, es decir:

a) Si $\mathbf{a} \in$ H y $\mathbf{b} \in$ H, entonces $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in$ H.

b) Si $\mathbf{a} \in$ H, entonces k$\mathbf{a} \in$ H para todo escalar k.

EJERCICIOS

Para cada uno de los siguientes casos, determine si el subconjunto H dado, del espacio vectorial V, es un subespacio vectorial de V:

21)V = { f(x) : f(x) es una función continua en [0,1] }; H = { f(x)$\in$C[0,1] : $\int_0^1 f(x)dx$ }

22)V = R^2 ; H = { (x,y)$\in R^2$: x = y }

23)V = R^2 ; H = { (x,y)$\in R^2$: $x^2 + y^2 \leq 1$ }

24)V = R^3 ; H = el plano XY.

25)V = { M_{2x2} : M es una matriz de tamaño 2x2 } ; H = { M $\in M_{2x2}$: $a_{12} + a_{21} = 0$ }

26)V = {M_{2x2}: M es una matriz de tamaño 2x2}; H = { M$\in M_{2x2}$:$a_{12} = 1+a_{11}$; $a_{12} = a_{21}$ }

27)V = M_{22} ; H = { A$\in M_{22}$: A es inversible }

28)V = { $P_4(x)$: P es un polinomio de grado n ≤ 4 } ; H = { P $\in P_4$: P(0) = 0 }

29)V = { $P_n(x)$: P es un polinomio de grado ≤ n } ; H = { P $\in P_n$: P(0) = 1 }

30)V = { $P_n(x)$: P es un polinomio de grado n ≤ 5 } ; H = { P $\in P_n$: 2 ≤ n ≤ 4 }

31)V = R^3 ; H = { (x,y,z) : ax + by + cz = d }

32) $V = R^3$; $H = \{ (x,y,z) : ax + by + cz = 0 \}$.

33) $V = R^3$; $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

34) $V = R^3$; $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

35) $V = R^3$; $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

36) $V = R^3$; $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x-3z \\ z \end{pmatrix} \right\}$.

37) $V = R^2$; $H = \{ (x,y) : y = nx \}$; $K = \{ (x,y) : y = mx \}$. ¿$H \cup K$ es subespacio de V?

Encuentre el subespacio vectorial $H \cap K$ de V, en cada uno de los siguientes casos:

38) $V = R^3$; $H = \{ (x,y,z) : x + 2y + 3z = 0 \}$; $K = \{ (x,y,z) : 3x - y - 2z = 0 \}$.

39) $V = M_{22}$; $H = \{ A \in M_{22} : a_{11} = 0 \}$, $K = \{ A \in M_{22} : A = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} \}$.

40) $V = R^3$; $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y-3z \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$; $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x-2y \end{pmatrix} \right\}$.

3. GENERACIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES

COMBINACION LINEAL: Sean $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ un conjunto de n vectores, entonces toda expresión de la forma $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots + a_nv_n$ en donde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son escalares, se llama **combinación lineal** de $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$.

INDEPENDENCIA LINEAL: Sean $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ un conjunto de n vectores, entonces decimos que los vectores son **linealmente dependientes** si existen n escalares $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ no todos ceros, tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \dots + c_nv_n = \mathbf{0}$. ($\mathbf{0}$ es el vector nulo). Si los vectores no son linealmente dependientes se dice que son linealmente independientes; es decir: $v_1, v_2, v_3, \dots v_n$ son **linealmente independientes** si y sólo si $c_1=c_2=c_3=\dots=c_n=0$.

CONJUNTO GENERADOR DE UN ESPACIO VECTORIAL: Los vectores $v_1, v_2, \dots v_n$ en un espacio vectorial V se dice que generan V, si todo vector en V puede expresarse como combinación lineal de ellos.

ESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES: Sean $v_1, v_2, \dots, v_n$ n vectores en un espacio vectorial V. El espacio generado por $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es el conjunto de las combinaciones lineales de $v_1, v_2, \dots, v_n$. Esto es: $\text{gen}\{v_1,v_2,\dots,v_n\} = \{ v : v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n \}$, donde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son escalares.

TEOREMAS:

a) Si $v_1, v_2, \dots, v_n$ son vectores de un espacio vectorial V, entonces gen$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un subespacio vectorial de V.

b) Sean $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$ n+1 vectores de un espacio vectorial V. Si $v_1, v_2, \dots, v_n$ generan a V, entonces $v_1, v_2, \dots, v_n$ también generan a V.

c) Dos vectores de un espacio vectorial V son linealmente dependientes si y solo si uno es múltiplo escalar del otro.

d) Tres vectores de R^3 son linealmente dependientes si y solo si son coplanarios.

e) Un conjunto de n vectores de R^m es linealmente dependiente si n>m.

f) Sean $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ n vectores de R^m y $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ el sistema homogéneo asociado a los vectores dados. Entonces: Los vectores son linealmente independientes si el sistema tiene solución única o trivial. Los vectores son linealmente dependientes si el sistema tiene infinitas soluciones o no triviales.

g) Sean $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$ n vectores de R^n y $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ la matriz formada por los n vectores. Entonces: Los vectores son linealmente independientes si $\det(A) \neq 0$. Los vectores son linealmente dependientes si $\det(A)=0$.

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL: Un conjunto de vectores no nulos $B=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ forman una base para el espacio vectorial V si :
(a) El conjunto $B = \{ v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \}$ es linealmente independiente.
(b) Cualquier $v \in V$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de B.

DIMENSIÓN: Si es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dim(V) es el número de vectores de la base de V.

TEOREMAS:

a) Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V y si $w \in V$, entonces existe un conjunto de escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ tales que $w = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$.

b) Dos bases de un espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores.

c) Si H es subespacio de un espacio V de dimensión finita, entonces $\dim(H) \leq \dim(V)$.

d) Si H es el subespacio nulo del espacio vectorial V, entonces $\dim(H)=0$.

e) Los únicos subespacios propios de R^3 son las rectas y planos que pasan por el origen.

f) Si dim(V)=n, entonces cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes constituyen una base para V.

VECTOR DE COORDENADAS: Si $B=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V, entonces, para cada vector **w** de V existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ únicos tales que $\mathbf{w} = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$. El vector $[w]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ se llama vector de coordenadas de w con respecto a la base B.

Si B es la base canónica del espacio vectorial V, entonces el vector de coordenadas del vector $w = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ es $[w]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

MATRICES DE TRANSICIÓN: Si $S=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es la base canónica del espacio V, y $T=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es otra base de V, entonces, la matriz de transición de la base canónica S a la base T es la inversa de la matriz C cuyas columnas son los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Si $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $T=\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ son dos bases (no canónicas) del espacio V, entonces, la matriz de transición M_{ST} de la base S a la base T es la matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas $[w_k]_S = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$, es decir, $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$. También se puede obtener con la inversa de la matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas $[v_k]_T = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$.

Una presentación simplificada del procedimiento para obtener la matriz de transición de la base S a la base T consiste en formar un arreglo matricial con la forma $[M_T \mid M_S]$, donde $M_T = [w_1 \ \ w_2 \ \ w_3 \ \dots \ w_n]$ y $M_S = [v_1 \ \ v_2 \ \ v_3 \ \dots \ v_n]$, y luego mediante operaciones elementales entre filas se debe obtener el arreglo $[I_{nn} \mid M_{ST}]$, donde I_{nn} es la matriz idéntica y M_{ST} es la matriz de transición de S a T.

DEFINICIÓN: Sean $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $T = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ bases no canónicas de un espacio vectorial de dimensión n, M_{ST} y M_{TS} matrices de transición de T a S y de S a T respectivamente, Ms y M_T las matrices formadas con los vectores columnas de las bases S y T, entonces:

a) Si $w \in V$, entonces $[w]_S = [M_{TS}][w]_T$ y $[w]_T = [M_{TS}]^{-1}[w]_S$

b) $[M_{TS}] = [M_{ST}]^{-1}$ y $[M_{ST}] = [M_{TS}]^{-1}$

c) $[M_{TS}][M_{ST}] = I_{nn}$

d) $[M_{TS}] = [M_S]^{-1}[M_T]$ y $[M_{ST}] = [M_T]^{-1}[M_S]$

EJERCICIOS

Determine en cada caso, si el conjunto de vectores es linealmente independiente:

41) X = { (2, -3), (3, -2) }

42) X = { (1, 2, -3), (3, -2, 1), (2, 2, -1) }

43) X = { $1 + 3x$, $3 - 4x^2$, $3 - 2x^2$ }

44) X = { e^{3x}, e^{5x}, e^{7x} }

45) X = { xe^x, x^2e^{2x}, e^{3x} }

46) X = { $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ }

47) Sea X = { (1, m, 2), (2m-1, 3, 1), (1, 3, 1) }. ¿Qué valor debe tomar m para que los vectores de X sean linealmente independientes?

48) Sea X = { $mx - x^2$, $1 - mx^2$, $3 + x$ }. ¿Qué valores reales debe tomar m, para que los vectores de X sean linealmente independiente?

49) Suponga que los vectores u, v y w son linealmente independientes. ¿Qué se puede decir de los vectores u+v, u+w, v+w?

50) Demuestre que los vectores $(1,a,a^2)$, $(1,b,b^2)$ y $(1,c,c^2)$ son linealmente independientes, si $a \neq b$, $a \neq c$ y $b \neq c$.

51) Sea X = { (2, 1, 2), (-1, 3, 4), (a, b, c) }. Encuentre (a, b, c) de tal manera que los vectores de X sean linealmente independientes?

Determinar el espacio generado por los siguientes conjuntos de vectores: (Del 52 al 59)

52) B = { (-3, 4), (1, -2) }

53) B = { (2, 3) }

54) B = { (1, 3, 4), (3, -2, -1), (4, 1, 7) }

55) B = { (3, -2, 1) , (4, 1, 1) }

56) B = { (1, 2, 3) }

57) B = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

58) $B = \{1-x,\ 1-x^3\}$

59) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

60) ¿El conjunto de polinomios $\{ x^3-x+2,\ x^3+x^2+3x+1,\ 2x^3+x^2+2x+1, 1-x^2 \}$ generan a P_3?

61) ¿Está $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el espacio generado por las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$?

Determinar si el conjunto de vectores dado es una base del espacio vectorial correspondiente: (Del 62 al 71)

62) $V= R^2$: $B = \{ (1,2) , (3,4) \}$

63) $V= R^3$: $B = \{ (1,1,1), (0,1,1), (0,0,1) \}$

64) $V= R^3$: $B = \{ (1,-1,2), (1,1,2), (0,0,1) \}$

65) $V= P_2$: $B = \{ 1 - x,\ 3 - x^2,\ x \}$

66) $V= P_4$: $B = \{ 1, x, x^2, x^3, x^4 \}$

67) $V= M_{2x2}$: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \right\}$

68) $V = \{ (x,y)\in R^2 : x + y = 0 \}$: $B = \{(1,-1)\}$

69) $V = \{ (x,y,z) : 5x - 2y - 3z = 0 \}$; $B = \{ (2, -1, 4), (4, 1, 6) \}$

70) $V = \{ (x,y,z) : x = 2t,\ y = 3t,\ z = 4t ,\ t\in R \}$; $B = \{ (2, 3, 4) \}$.

71) $V = \{ (x,y,z) : x + y + z = 0 \}$; $B = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$.

72) Hallar una base para el espacio solución del sistema $\{x + 2y = z\ ;\ 2x - y + 3z =0\}$.

73) ¿Para qué valores reales de x constituyen una base de R^3 los vectores $(1+ x, 1, x)$, $(x, 1, 0)$ y $(1, 0, x)$?

74) Hallar una base para el espacio solución **S** del siguiente sistema de ecuaciones lineales $\{ 2x - y + 3z = 0\ ;\ 4x - 2y + 6z = 0\ ;\ -6x + 3y - 9z = 0 \}$

75) Hallar una base en R^3 para el conjunto de vectores en el plano π definido como $\pi : = \{ (x,y,z) : 3x - 2y + 6z = 0 \}$

76) Hallar una base para el conjunto de vectores de la recta $x/2 = y/3 = z=4$.

77) Encuentre una base para el espacio vectorial $D_3 = \{A\in M_{33}$: A es una matriz diagonal$\}$.

78) Encuentre una base para el espacio vectorial $S_3 = \{A\in M_{33}$: A es una matriz simétrica$\}$.

79) Encuentre una base para el espacio vectorial $D_n = \{A\in M_{nn}$: A es una matriz diagonal$\}$.

80) Hallar la dimensión del espacio vectorial D_3 = {$A\in M_{33}$: A es una matriz diagonal}.

81) Encuentre una base para el espacio vectorial S_n = {$A\in M_{nn}$: A es una matriz simétrica}.

82) Hallar la dimensión del espacio vectorial S_3 = {$A\in M_{33}$: A es una matriz simétrica}.

83) Hallar la dimensión del espacio vectorial D_n = {$A\in M_{33}$: A es una matriz diagonal}.

84) Hallar la dimensión del espacio vectorial S_n = {$A\in M_{nn}$: A es una matriz simétrica}.

85) Hallar la dimensión del espacio vectorial $\pi : = \{ (x,y,z) : 3x - 2y + 6z = 0 \}$

86) Hallar la dimensión del espacio vectorial $H = \{ (x,y,z) : x = 2t,\ y = 3t,\ z = 4t\ ,\ t\in R \}$;

87) Hallar la dimensión del espacio vectorial $H = \{(x,y,z):\ 2x - y + 3z=0\ ;\ 4x - 2y + 6z=0;\ 6x - 3y + 9z = 0 \}$.

88) Hallar la dimensión del espacio vectorial $H\cap K$, si $H=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y-3z\\y\\z\end{pmatrix}\right\}$ y

$K = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\3x-2y\end{pmatrix}\right\}$.

89) Hallar la dimensión del espacio vectorial $V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 : \begin{pmatrix}1&3&5\\2&1&3\\3&4&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

90) Hallar la dimensión del espacio vectorial $V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 : \begin{pmatrix}1&-3&2\\-2&6&-4\\-1&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

91) Hallar la dimensión del espacio vectorial $V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 : \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

92) ¿Qué valor debe tomar m, para que la dimensión del espacio vectorial V sea 1, si $V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 : \begin{pmatrix}1&-3&2\\2&1&-1\\-1&3&2m-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

93) ¿Qué valor debe tomar m, para que la dimensión del espacio vectorial V sea 2, si $V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 : \begin{pmatrix}1&-3&2\\-2&6&-4\\-1&3&3m-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ sea 2.

94) Encuentre una base para el espacio vectorial $H = \{(x,y,z,u,v)\in R^5 : 2x-3y+z+4u-v=0\}$.

95) Hallar la dimensión del espacio vectorial $H = \{(x,y,z,u,v)\in R^5 : 2x-3y+z+4u-v=0\}$.

96) Si $B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ y $B_2=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ son bases de R^3, $v=\begin{pmatrix}1\\3\\8\end{pmatrix}$ y $w=\begin{pmatrix}1\\3\\8\end{pmatrix}$ son vectores de R^3, entonces:

a) ¿Cuáles son los vectores de coordenadas de v y w com respecto a la base B_1?
b) ¿Cuál es la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2?
c) ¿Cuál es la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1?

97) Sean $B_1=\{1,x,x^2\}$ y $B_2=\{4x-1, 2x^2-x, 3x^2+3\}$ bases de P_2.

a) ¿Cuál es la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1?
b) ¿Cuál es el vector de coordenadas de $5x^2-3x+4$ com respecto a la base B_2?

98) Si $B_1=\{x^2+x+1,\ x^2+2x+3,\ x^2+1\}$ y $B_2=\{x+1,\ x^2,\ x^2+1\}$ son bases para P_2, $v=5+4x-x^2$ y $w=2x^2-6$, entonces:

a) ¿Cuáles son los vectores de coordenadas de v y w com respecto a la base B_1?
b) ¿Cuál es la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2?
c) ¿Cuál es la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1?

99) Si $B_1=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}$ y $B_2=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ son bases de M_{22}, $v=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ y $w=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$ son vectores de R^3, entonces:

a) ¿Cuáles son los vectores de coordenadas de v y w com respecto a la base B_1?
b) ¿Cuál es la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2?
c) ¿Cuál es la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1?

100) Sean $B_1=\{v1,v2,v3\}$ y $B_2=\{w1,w2,w3\}$ son bases de R^3, donde $v_1=(1,0,1)$, $v_2=(1,1,0)$ y $v_3=(0,0,1)$. Si la matriz de transición de B_2 a B_1 es $\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$, ¿Cuáles son los vectores de coordenadas de la base B_2?