ALGEBRA LINEAL
GUIA No 4

VECTORES EN R^n.

1. OPERACIONES CON VECTORES

VECTORES EN R^2: Un vector **v** en el plano R^2 = XY es un par ordenado de números reales $<a,b>$. Los números reales a y b se llaman componentes del vector **v**. El vector cero es $<0,0>$. El vector **v** se puede escribir como AB, donde A es el punto inicial y B es el punto final. Si **v** = AB con $A=(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, entonces **v** = B-A = $<x_2-x_1,y_2-y_1> = <x_3,y_3>$. La norma o magnitud del vector **v** es $\| \mathbf{v} \| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$.

VECTORES EN R^3: Un vector en el espacio R^3 = XYZ es una terna ordenada de números reales $<a,b,c>$. Si **v** = AB, con $A=(x_1,y_1,z_1)$ y $B=(x_2,y_2,z_2)$, entonces $\mathbf{v} = <x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1> = <v_1,v_2,v_3>$. La norma del vector **v** es $\| \mathbf{v} \| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

VECTORES UNITARIOS: Un vector v de R^n es unitario si su norma es igual a la unidad, es decir: $\| v \| = 1$.
Son vectores unitarios en R^2: $\mathbf{i} = <1,0> = e_1$ y $\mathbf{j} = <0,1> = e_2$.
Son vectores unitarios en R^3: $\mathbf{i} = <1,0,0> = e_1$, $\mathbf{j} = <0,1,0> = e_2$ y $\mathbf{k} = <0,0,1> = e_3$.
Son vectores unitarios en R^n: $e_1 = <1,0,0,\dots,0>$, $e_2 = <0,1,0,\dots,0>$, …, $e_n = <0,0,\dots,1>$.
Si **w** es un vector distinto de cero, $\vec{u} = \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ es un vector unitario.

DIRECCION DE UN VECTOR: En R^2, la dirección del vector $v = <a,b>$ se define como el ángulo θ que forma el vector con la parte positiva del eje X. $\theta = \text{Tan}^{-1}(b/a)$.

En R^3, la dirección de un vector $\mathbf{u} = <x_0,y_0,z_0>$ se dá en términos de los ángulos directores α, β y χ así: $\text{Cos}\alpha = x_0 / \|\mathbf{u}\|$; $\text{Cos}\beta = y_0 / \|\mathbf{u}\|$; $\text{Cos}\chi = z_0 / \|\mathbf{u}\|$, cada ángulo está limitado por el vector **u** y la parte positiva de cada eje coordenado.

ADICION DE VECTORES: Sean $\mathbf{u} = <x_1,x_2,x_3, \dots , x_n>$ y $\mathbf{v} = <y_1,y_2,y_3, \dots , y_n>$ vectores de R^n, entonces $\mathbf{u+v} := <x_1+y_1, x_2+y_2, \dots , x_n+y_n>$

PRODUCTO DE VECTORES: Se distinguen tres tipos de productos con vectores:

1. **PRODUCTO POR ESCALAR:** Si $\mathbf{u} = (x_1,x_2,x_3, \dots , x_n)$ es un vector de R^n y $k \in R$, entonces $k\mathbf{u} = k(x_1,x_2,x_3, \dots , x_n) = (kx_1,kx_2,kx_3, \dots , kx_n)$.
   PROPIEDADES:
   a) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$, $c \in R$.
   b) $(c+d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$. $c,d \in R$.
   c) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$. $c,d \in R$.
   d) $\|k\mathbf{u}\| = |k| \, \|\mathbf{u}\|$. $k \in R$.

2. **PRODUCTO PUNTO:** Sean $\mathbf{u} = (x_1,x_2,x_3, . . . , x_n)$ y $\mathbf{v} = (y_1,y_2,y_3, . . . , y_n)$ vectores de R^n, el producto punto se define como $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + . . . + x_ny_n$.
   PROPIEDADES:
   a) $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\geq 0$; $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=0$ si y solo si $\mathbf{u}=\mathbf{0}$.
   b) $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = \mathbf{v}\bullet\mathbf{u}$.
   c) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\bullet\mathbf{w} = \mathbf{u}\bullet\mathbf{w} + \mathbf{v}\bullet\mathbf{w}$.
   d) $(c\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{u}(c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})$.
   e) $|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.
   f) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

3. **PRODUCTO CRUZ:** Sean $\mathbf{u} = (x_1,x_2,x_3)$ y $\mathbf{v} = (y_1,y_2,y_3)$ vectores de R^3, el producto cruz o vectorial se define como $\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$. El vector resultante $\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}$ es perpendicular a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.
   PROPIEDADES:
   a) $\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v} = -(\mathbf{v}\mathrm{x}\mathbf{u})$.
   b) $\mathbf{u}\mathrm{x}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{w}$.
   c) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathrm{X}\mathbf{w} = \mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{w} + \mathbf{v}\mathrm{x}\mathbf{w}$.
   d) $k(\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}) = (k\mathbf{u})\mathrm{x}\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathrm{x}(k\mathbf{v})$.
   e) $\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{u} = \mathbf{0}$; $\mathbf{0}\mathrm{x}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
   f) $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}) = 0$ y $\mathbf{v}\bullet(\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}) = 0$.
   g) $\|\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})^2$.
   h) $\|\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \,\mathrm{Sen}(\theta)$.
   i) $(\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v})\bullet\mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ (Triple producto escalar).

ANGULO ENTRE VECTORES: Sean **u** y **v** dos vectores distintos de cero. Si θ es el ángulo entre ellos, entonces $\mathrm{Cos}\theta = \mathbf{u}\bullet\mathbf{v} / \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.

VECTORES PARALELOS: Sean u y v vectores distintos de cero, u es paralelo a v si existe u real k tal que $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ o $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$. Se puede verificar que si u y v son paralelos entonces $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ si **u** y **v** tienen el mismo sentido, y $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = -\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ si **u** y **v** tienen sentidos opuestos.

VECTORES PERPENDICULES: Sean **u** y **v** dos vectores distintos de cero, **u** y **v** son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = 0$.

PROYECCION: Sean **u** y **v** vectores distintos de cero. La proyección de **u** sobre **v** es un vector denotado $\mathbf{proy_v u}$, que se define por $\mathbf{proy_v u} = \left(\frac{\mathbf{u}\circ\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v}$.

INDEPENDENCIA LINEAL: Sean $v_1, v_2, v_3, . . . , v_n$ un conjunto de n vectores, entonces decimos que los vectores son **linealmente dependientes** si existen n escalares $c_1, c_2, c_3, . . . , c_n$ no todos ceros, tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + . . . + c_nv_n = \mathbf{0}$. (**0** es el vector nulo). Si los vectores no son linealmente dependientes se dice que son linealmente independientes; es decir: $v_1, v_2, v_3, . . . v_n$ son **linealmente independientes** si y sólo si $c_1=c_2=c_3=. . . =c_n=0$.

COMBINACION LINEAL: Sean $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ un conjunto de n vectores, entonces toda expresión de la forma $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n$ en donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son escalares, se llama **combinación lineal** de $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$.

2. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

ECUACION DE LA RECTA: La recta L que pasa por el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y que tiene la dirección del vector D=<a,b,c> se define como $L = \{ PX \mid PX = tD, t\in R \}$.
La ecuación vectorial de la recta es de la forma : $X - P = tD$.
Las ecuaciones paramétricas de la recta son : $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$, $t\in R$.
Las ecuaciones simétricas de la recta son : $(x - x_0)/a = (y - y_0)/b = (z - z_0)/c$.

ECUACION DEL PLANO: El plano Π que pasa por el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y tiene vector normal N=<a,b,c> se define como $\Pi = \{ PX \mid PX\bullet N = 0 \}$. La ecuación general del plano es de la forma $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS: Sean D1 y D2 los vectores dirección de las rectas L1 y L2 no intersecantes. Sea n = D1xD2 un vector perpendicular a las dos rectas. Sean P y Q puntos de las rectas L1 y L2 respectivamente, y PQ el vector definido por P y Q. Entonces la distancia entre las rectas es $D(L1,L2) = \| Proy_n PQ \|$.

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO: Sea π un plano definido como ax + by + cz = d, con vector normal n = <a,b,c>, y sea P(x0,y0,z0) un punto ajeno al plano π. Sea Q un punto del plano QP el vector definido por los puntos Q y P. Entonces la distancia del punto P al plano p se define como D(P,p) =
$\| Proy_n QP \| = \dfrac{| QP \circ n |}{\| n \|} = \dfrac{| ax_o + by_o + cz_0 - d |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

EJERCICIOS

1) Considere los siguientes puntos de R^2 : A=(1,2); B=(1,4); C=(3,7); D=(-2,5); O=(0,0). Obtener :

   (a) Gráfica de los vectores AB, AC, AD y AO en un mismo plano.
   (b) Gráfica de los vectores BD, CD, OB y OD en un mismo plano.
   (c) Norma los vectores AB, BC, CD y DO.
   (d) Dirección de los vectores AB, DB, OC y AO.

2) Considere los puntos de R^2: O=(0,0); P=(4,8); Q=(1,7); R=(5,5); S=(-3,9). Obtener gráficamente:

   (a) OP + OR
   (b) PQ + PR
   (c) PS + 2QS
   (d) 3OQ - OR

3) Considere los puntos de R^2: O=(0,0); P=(4,8); Q=(1,7); R=(5,5); S=(-3,9). Obtener analíticamente:

   (a) OP + 3PQ
   (b) 2PR - 3RS
   (c) 5PQ - 3RS
   (d) 5PQ + 2RS

4) Considere los siguientes puntos de R^2 : A=(1,2); B=(1,4); C=(3,7); D=(-2,5); O=(0,0). Escribir los siguientes vectores como una combinación lineal de los vectores ***i***=<1,0> y ***j***=<0,1> :

(a) 3AB - 2BC
(b) BC + CD
(c) 4AC - 2BD
(d) CD + 3OB

5) Considere los siguientes vectores en R^2: **u**=<2,3>; **v**=<4,8>; **w**=<-3,7>; **x**=<9,9>; **y**=<0.5>. Hallar:

(a) Norma de los vectores: u + v ; u - v ; 2u - 3w ; 3u - 2w ; 3x ; 4y .
(b) Productos puntos : u•v ; (3w)•(4x) ; (2x-y)•(2x+y) ; (u+v)•(u-v).
(c) Angulo entre los vectores: u y v ; 2v y 3w ; x y 2y ; 2x y 3y ; 3x y 4y.
(d) Vectores paralelos a : u ; 2v ; 3w ; 4x ; 5y ; u + v ; w + x + y.

6) Considere los siguientes puntos de R^3 : A=(1,2,3); B=(3,0,-4); C=(0,6,0); D=(7,5,1).

(a) Graficar los vectores AB ; AC; BC; BD y CD.
(b) Hallar la norma de los vectores AB; BC; CD; AD y CA.
(c) Hallar el ángulo entre los vectores AB y AC ; BD y BC; AC y BD.
(d) Obtener: 3AB + 5BC ; 4AC - 5CD ; (AB - CD)•(AB + CD) ; (2AB)•(BC + CD).
(e) Escribir como combinación lineal de los vectores ***i, j, k***: 3AB - 2BC; 4BC + 2CD; 5AB – AC.

7) Considere los siguientes vectores de R^3 : **a**=<3,6,8>; **b**=<3,-4,-6>; **c**=<8,0,-3> y **d**=<1,1,1>. Resolver los siguientes problemas :

(a) Encontrar la dirección de los vectores a+b; a-b; c+d; c-d.
(b) Encontrar un vector que sea unitario y paralelo al vector: a+b; a-b; c+d y c-d.
(c) Realizar los siguientes productos: a•(bxc) ; b•(axc) ; (axbxc) ; (a•b)(c•d)
(d) Encontrar un vector que sea unitario y perpendicular al vector: 2a+b; a-2b y 2c-3d.
(e) Encontrar un vector que sea perpendicular a los vectores a y b.
(f) Encontrar un vector unitario que sea perpendicular a los vectores c y d.
(g) Hallar el ángulo entre los vectores: a y b; a y c; b y c; b y d; c y d.
(h) Hallar las proyecciones : $proy_a b$; $proy_b a$; $proy_c d$; $proy_d c$.
(i) Calcular las normas: || axbxc || ; || axcxb || ; || $proy_a b$ || ; || $proy_c d$ ||.
(j) Encontrar por dos métodos un vector perpendicular a los vectores: a y b ; c y d.

8) Sea **u** = 3i + 4j y **v** = i + aj. Encuentre el valor de "a" para que :

(a) u y v sean ortogonales.
(b) u y v sean paralelos.
(c) El ángulo entre u y v sea $\pi/4$.
(d) El ángulo entre u y v sea $\pi/3$.

9) Considere los vectores de R^3: **a**=<1,2,3>; **b**=<2,-3,-4>; **c**=<3,0,-2>; **d**=<1,0,-5> y **e**=<0,1,1>.

(a) Expresar el vector <3,7,3> como combinación lineal de los vectores a, b y c.
(b) Expresar el vector <1,1,1> como combinación lineal de los vectores c, d y e.
(c) Expresar el vector A como combinación de los vectores b, c y d.
(d) Expresar el vector <0,1,0> como combinación lineal de los vectores a, c y e.
(e) Expresar el vector <1,0,1> como combinación lineal de los vectores a y b.

10) Si A, B y C son puntos de R^3 y son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, entonces el área del paralelogramo es ll AB x BC ll. Si **u** = (u_1,u_2) y **u** = (v_1,v_2) son vectores de R^2, entonces el área del paralelogramo que generan es ll $(u_1,u_2,0)$ x $(v_1,v_2,0)$ ll. Tres vectores u, v y w de R^3 son coplanarios si u•(vxw) = 0. Si u•(vxw) $\neq$ 0 entonces ll u•(vxw) ll es el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores u, v y w.

(a) Encuentre el área del paralelepípedo con vértices consecutivos en : P(1,3,-2), Q(2,1,4) y R(-3,1,6).
- P(1,-2,3), Q(2,0,1) y R(0,4,0).
- P(a,b,0), Q(a,0,b) y R(0,a,b).

(b) Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores :
- **u** = 2i - j + k, **v** = 3i + 2j - 2k, **w** = 3i + 2j.
- **u** = i - j, **v** = 3i + 2k, **w** = -7j + 3k.
- **u** = i + j + k, **v** = i - j - k, **w** = 2i + j.

(c) Determinar si los siguientes vectores son coplanarios :
- **u** = 2i - 3j + 4k, **v** = 7i - 2j + 3k, **w** = 9i - 5j + 7k.
- **u** = -3i + j + 8k, **v** = -2i - 3j + 5k, **w** = 2i + 14j - 4k.
- **u** = 2i + j - 2k, **v** = 2i - j - 2k, **w** = 2i - j + 2k.

(d) Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores PQ, PR y PS, donde P=(2,1,-1), Q=(-3,1,4), R=(-1,0,2) y S=(-3,-1,5).

11) Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes :

(a) { (2, 3, 2) , (1, 0, 1) , (3, 1, 1) }
(b) { (-3,-3,-3) , (0, 0, 2) , (4, 1 , -3) }
(c) { (7, 0, 1) , (3, 0, 5) , (3, 0, 3) }
(d) { (2, 1, 3), (4, 2, 1) , (6, 3, 1) }
(e) { (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0) }

12) ¿Para qué valores de "a" son linealmente dependientes los vectores :

(a) (1,2,3), (2,-1,4) y (3,a,4) ?
(b) (2,-3,1), (-4,6,-2) y (a,1,2) ?
(c) (a+1,1,1), (2,-1,3) y (3,0,a-1) ?
(d) (1,-a,1), $(2,a^2,-3)$ y $(-2,3a^3,0)$?

13) Sean f y g funciones continuas en [0,1], el Wronskiano de f y g se define como W(f,g) = Det [(f(x),g(x)),(f´(x),g´(x))]. Si existe $x\in[0,1]$ para el cual W(f,g) = 0, entonces f y g son linealmente independientes.
Determinar si los siguientes conjuntos de funciones son linealmente dependientes o linealmente independientes :

(a) En C[0,1] : Sen2x , Cos2x
(b) En C[0,1] : e^x , e^{2x}, e^{3x}.
(c) En C[0,1] : 1, x , x^2 , x^3.
(d) En C[0,1] : x , $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$.

14) Exprese el polinomio $P(x) = 1 + 2x + x^2$ como una combinación lineal de los polinomios $P_1(x) = 3 + x$, $P_2(x) = 4x + 6x^2$ y $P_3(x) = 4 - 2x^2$, si es posible.

15) Encuentre la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos :

(a) $P(2,1,8)$ y $Q(4,0,7)$
(b) $P(1,1,1)$ y $Q(9,9,9)$
(c) $P(0,0,0)$ y $Q(-2,-2,-2)$

16) Encuentre las ecuaciones paramétricas y simétrica de la recta que satisface las siguientes condiciones:

(a) Que pasa por $P(1,-2,4)$ y es paralela al vector $u= -3i -5j$.
(b) Que pasa por $P(4,2,-6)$ y es paralela a la recta $(x-2)/4 = (y+8)/5 = (z-8)/2$.
(c) Que pasa por el origen y contiene al vector $v = (1,2,3)$.

17) Demuestre que :

(a) Las rectas $(x-3)/2 = (y+1)/4 = (2-z)/1$ y $(x-3)/5 = (-y-1)/2 = (z-3)/2$ son ortogonales.
(b) Las rectas $(x-1)/1 = (y+3)/2 = (z+3)/3$ y $(x-3)/3 = (y-1)/6 = (z-8)/9$ son paralelas.
(c) Las rectas $L_1 := x = 1+t,\ y = -3+2t,\ z = -2-t$ y $L_2 := x = 17+3u,\ y = 4+u,\ z = -8-u$ se intersecan en el punto $P(2,-1,-3)$.

18) Encuentre la ecuación de una recta L, ortogonal a las dos rectas dadas y que pase por el punto dado :

(a) $L_1 := (x+2)/3 = (y-3)/5 = z/6$ y $L_2 := (2-x)/2 = (3-x)/7 = (z-8)/8$; $P(1,-3,4)$.
(b) $L_1 := (x-2)/3 = (y+3)/2 = (z-4)/1$ y $L_2 := (2-x)/2 = (y-1)/3 = (z-2)/8$; $P(2,3,-4)$.
(c) $L_1 := (x-7)/4 = (y-10)/1 = z/2$ y $L_2 := (2-x)/2 = y/7 = (z-1)/9$; $P(3,-6,9)$.

19) Encuentre la ecuación del plano que cumple las siguientes condiciones :

(a) Que pase por $P(4,9,8)$ y tiene vector normal $n=<2,3,2>$.
(b) Que pase por el origen y tiene vector normal $n=<5,5,5>$.
(c) Que pase por $P(3,5,-3)$ y es paralelo al vector $d=<6,-4,2>$.

20) Encuentre la ecuación del plano que pasa por los siguientes puntos :

(a) $P(2,3,4)$, $Q(7,-9,0)$ y $R(4,8,0)$.
(b) $P(4,9,0)$, $Q(7,6,-3)$ y $R(0,-2,0)$.
(c) $P(7,0,0)$, $Q(0,7,0)$ y $R(0,0,7)$.

21) Encuentre la ecuación del plano que satisface las siguientes condiciones :

(a) Que contiene al punto $P(3,3,3)$ y contiene al vector $u=<-3,5,-7>$.
(b) Que contiene a los vectores $u=<2,-4,6>$ y $v=<3,-5,-7>$.
(c) Que corta a los ejes X, Y, Z en 3, 6 y 9 respectivamente.

22) Encuentre la intersección entre los siguientes planos :

(a) $2x + 3y - z = 8$; $4x - y - z = 10$; $3x + y + 2z = 0$.
(b) $x + y + z = 12$; $3x - y - 4z = 8$.
(c) $3x - 2y + z = 6$; $5x + 3y - 8z = 10$.

23) Encuentre el ángulo entre cada par de planos :

(a) $3x + y + 5z = 8$ y $2x + y + z = 4$.
(b) $2x + 2y + 2z = 0$ y $x + 3y - 5z = 6$.
(c) $4x + y + 8z = 10$ y $x - 3y - 4z = 8$

24) Determine si los vectores dados son coplanarios. Si lo son, encuentre la ecuación del plano que los contiene :

(a) $\mathbf{u} = 2i - 3j + 4k$; $\mathbf{v} = 7i - 2j + 3k$; $\mathbf{w} = 9i - 5j + 7k$.
(b) $\mathbf{u} = -3i + j + 8k$; $\mathbf{v} = -2i - 3j + 5k$; $\mathbf{w} = 2i + 14j - 4k$.
(c) $\mathbf{u} = (-4,5,-7)$; $\mathbf{v} = (5,-8,0)$; $\mathbf{w} = (10,10,-20)$.

25) Encuentre la ecuación del plano que contiene a la recta L y al punto P dados:

(a) $\mathbf{L}$:= $(x-2)/3 = (y+3)/4 = (z-7)/3$; $P(7,7,7)$
(b) $\mathbf{L}$:= $x/3 = y/5 = z/7$; $P(4,0,4)$
(c) $\mathbf{L}$:= $(3-x)/1 = (2-y)/2 = (1-z)/3$; $P(0,0,0)$

26) Encuentre :

(a) Tres puntos del plano $3x + 4y - 2z = 12$.
(b) La distancia entre el plano $2x - 3y + 5z = 8$ y el punto $P(1,1,10)$.
(c) La ecuación de un plano que contenga la intersección de los planos $P_1 := x + y = 4$ y $P_2 := y - z = 4$ y que pase por el punto $P(10,10,10)$.

27) El plano Π_1 pasa por los puntos $A(2,3,4)$, $B(3,5,7)$ y $C(7,5,3)$ y el plano Π_2 pasa por los puntos $P(2,0,4)$, $Q(7,5,1)$ y $R(5,7,0)$. Determinar si estos planos son intersecantes o nó, en caso que lo sean, encuentre la recta en que se intersecan.

28) Encuentre la distancia entre el plano π_k y el punto $P(x,y,z)$ dado, o la distancia entre las rectas L_1 y L_2 según sea el caso:

(a) $\pi_1 := 2x + 3y - z - 12 = 0$; $P(1,1,10)$
(b) $\pi_2 := 3x - y - 2z + 8 = 0$; $P(2,2,6)$
(c) $\mathbf{L}_1 :=$ $x= 1+t$, $y=2+3t$, $z=3-2t$ $(t \in R)$; $\mathbf{L}_2 :=$ $x=4+3u$, $y=2+4u$, $z=-3+u$ $(u \in R)$.
(d) $\mathbf{L}_1 := (x-2)/3=(y+3)/1=(z-2)/4$; $\mathbf{L}_2 := x/3 = y/2 = z/1$.

29) Determine un par de planos cuya intersección sea la recta dada:

a) $\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -3 + 4t \\ z = -4 + 6t, \quad (t \in R) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 + 2t, \quad (t \in R) \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -2 - 6t \\ y = -4 - 4t \\ z = -6 - 2t, \quad (t \in R) \end{cases}$

30) En el gráfico 1: La ecuación del plano P1 es $x + 2y + 3z = 12$ y la ecuación del plano P2 es $2x - 3y + 4z = 12$. Los planos P1 y P2 se intersecan en la recta L1. Las rectas L1, L2 y L3 son paralelas entre sí. Hallar la ecuación del plano P3, si se sabe que el punto $A=(7,1,1)$ está en L2 y el punto $B=(20,4,-4)$ está en la recta L3.

31) En el gráfico 2: La ecuación del plano P_1 es $2x + 3x - 4z = 12$, la ecuación del plano P_2 es $4x - y - 2z = 16$. El plano P_3 se interseca con los planos P_1 y P_2 en la recta L. Encuentre la ecuación del plano P_3, si se sabe que P_3 pasa por el punto $A(0,0,0)$.

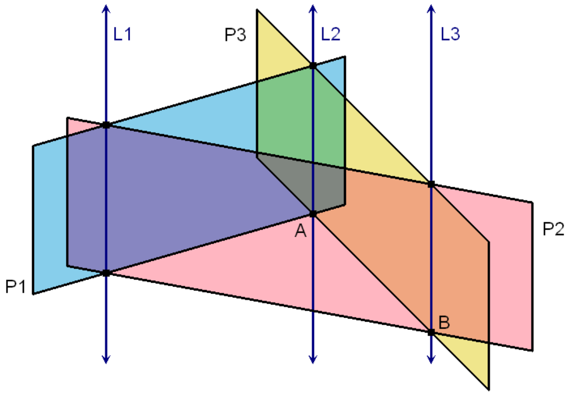

GRÁFICO 1:

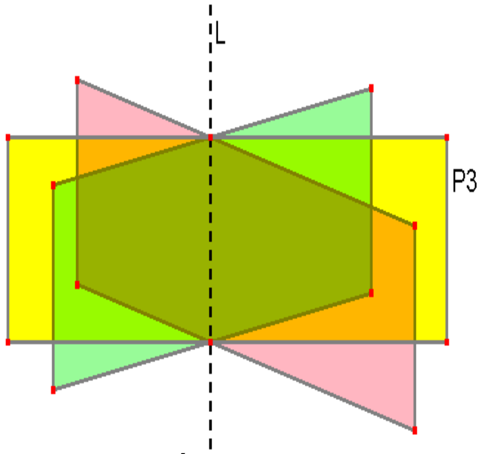

GRÁFICO 2

32) ¿Qué valores deben tomar m y n, para que los siguientes planos tengan un punto en común: $x + y + (m-3)z - 8 = 0$, $x - y - z - 4 = 0$, $2x + 3y + z = 2n-1$?

33) ¿Qué valores deben tomar m y n, para que los siguientes planos tengan infinitos puntos en común: $x + 2y + (m-2)z - 8 = 0$, $x - y - (m+2)z - 4 = 0$, $2x + 3y + z = 3n-2$?

34) Encuentre el punto de intersección de la recta $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$ y el plano $2x+3y+4z=-8$.

35) Verifique que la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(a_1,b_1,c_1)$, $P_2(a_2,b_2,c_2)$ y $P_3(a_3,b_3,c_3)$ es :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$