ALGEBRA LINEAL
GUIA No 3

DETERMINANTES

Definición: El **determinante** es una función con dominio en el conjunto de las matrices y con recorrido en el conjunto de los reales. Por ser una función, el determinante de una matriz es único. Si la matriz no es cuadrada, el determinante es cero.

El determinante de una matriz de tamaño 2x2 es $\text{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Regla de Sarrus: Si A es una matriz de tamaño 3x3 aplicamos la siguiente regla:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{Det}(A) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & - & - & - \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & & + & + & + \end{array} \end{array}$$

$$\text{Det}(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12})$$

Como se puede observar, se agregan las dos primeras columnas y luego se realizan los productos de los elementos señalados por las diferencias flechas.

Matriz Menor : Si $A_{nn} = (a_{ij})$ es un arreglo matricial cuadrado, la matriz menor M_{ij} asociada al elemento a_{ij} es la matriz de tamaño (n-1)x(n-1) que se forma con los elementos que quedan después de eliminar la fila i y la columna j.

Cofactor : Si $A_{nn} = (a_{ij})$ es un arreglo matricial cuadrado, el cofactor asociado al elemento a_{ij} es $\text{Cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$.

Matriz de Cofactores : Si $A_{nn} = (a_{ij})$ es un arreglo matricial cuadrado, la matriz de cofactores de A está formada por los cofactores de los elementos de A. Se nota Cof(A).

Determinante por Menores y Cofactores : Si $A_{nn} = (a_{ij})$ es un arreglo matricial cuadrado y $C_{nn} = (c_{ij})$ es la matriz de cofactores de A, el determinante de la matriz A es el producto punto entre fila i de A y la fila i de C. (Análogo con columnas)

Matriz Adjunta : Si $A_{nn} = (a_{ij})$ es un arreglo matricial cuadrado y $C_{nn} = (c_{ij})$ es la matriz de cofactores de A_{nn}, entonces la matriz adjunta de A_{nn} es la transpuesta de C_{nn}. Se nota Adj(A) = Tr(Cof(A)).

Matriz Inversible : Si $A_{nn} = (a_{ij})$ es un arreglo matricial cuadrado, A_{nn} es inversible si existe una matriz B_{nn} tal que $A_{nn} B_{nn} = B_{nn} A_{nn} = I_{nn}$. Se nota A^{-1}.

Relación Inversa - **Determinante** : Si $A_{nn} = (a_{ij})$ es un arreglo matricial cuadrado y $\det(A) \neq 0$, entonces A_{nn} es inversible.

Matriz Inversa : Si A_{nn} es una matriz inversible, entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(A)}\mathrm{Adj}(A)$.

Propiedades de los determinantes: Las propiedades básicas de los determinantes son:

(1) El determinante de la matriz A y de su transpuesta son iguales: $\det(A) = \det(A^T)$.

(2) El determinante es una función multiplicatica, es decir: el determinante de un producto de matrices es igual al producto de sus determinantes : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(3) Si A es una matriz inversible, entonces $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

(4) Si A tiene una fila o una columna de ceros, entonces $\det(A) = 0$.

(5) Si A tiene dos filas o dos columnas idénticas, entonces $\det(A) = 0$.

(6) Si B es una matriz que se obtiene de una matriz A, si se multiplica una fila o una columna de A por un escalar k, entonces $\det(B) = k\det(A)$.

(7) Si A tiene tamaño nxn y B = mA, entonces $\det(B) = \det(mA) = m^n\det(A)$.

(8) Si B es una matriz que se obtiene de una matriz A, si se intercambian dos filas o dos columnas de A, entonces $\det(B) = -\det(A)$.

(9) Si B es una matriz que se obtiene de una matriz A, si se suma un múltiplo de una fila o columna a otra, entonces $\det(A) = \det(B)$.

(10) Si A es una matriz triangular, entonces det(A) es igual al producto de los elementos de la diagonal.

(11) Si A es la matriz de coeficientes de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, el sistema tiene solución única si y solo si $\det(A) \neq 0$.

(12) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo $Ax = 0$ tiene una solución diferente de cero si y solo si $\det(A) = 0$.

EJERCICIOS

Ejercicio 1: Calcular el determinante de las siguientes matrices :

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -9 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2: Resolver las siguientes ecuaciones :

a) $\begin{vmatrix} 2x & -3 \\ 1 & 3x \end{vmatrix} = 9$ b) $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ 5 & 3x-1 \end{vmatrix} = -15$ c) $\begin{vmatrix} x & -3-x \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = 3$

Ejercicio 3: Calcular el determinante de las siguientes matrices :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -3 & 4 & -7 \\ -5 & 6 & -9 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4: Resolver las siguientes ecuaciones :

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3 & 3 \\ 1 & 2x & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4$ b) $\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ x & 3 & x \\ 8 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 6$ c) $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & 3 \\ 2 & x^3 & 6 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

Ejercicio 5: Hallar las matrices menores asociadas a los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} y a_{55} de las matrices A, B y C.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6: Hallar la matriz de cofactores de cada una de las siguientes matrices :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7: Hallar el determinante de las siguientes matrices por el método de menores y cofactores:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -4 \\ -2 & 2 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -3 & 50 \\ -2 & 10 & 50 & -3 \\ -3 & 50 & 10 & -2 \\ 10 & -3 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8: Hallar la matriz adjunta de las siguientes matrices :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 7 \\ 2 & -4 & -6 & 8 \\ 8 & -6 & -4 & 2 \\ 7 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 & -8 \\ -1 & 3 & 5 & -7 \\ -7 & 5 & 3 & -1 \\ -8 & 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 9: Determinar cuál de las siguientes matrices es inversible :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{pmatrix}$

Ejercicio 10: Hallar los valores de m para que la matriz dada sea inversible:

a) $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & m-3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2-m & 3 \\ 1 & m-2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1-m & 1 \\ 1 & m+3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2+m & 1 \\ 2 & -1 & 3-m & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 11: Calcular el determinante de las siguientes matrices, después de convertirlas en matrices triangulares:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\10&30&40&60\\2&6&9&12\\5&15&25&45\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}2&5&3&1\\8&25&9&2\\12&60&12&1\\10&20&15&2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}5&10&15&20\\9&6&3&12\\8&4&12&8\\12&18&6&24\end{pmatrix}$

Ejercicio 12: Calcular el determinante de las siguientes matrices, después de convertirlas en matrices triangulares:

a) $A=\begin{pmatrix}2&1&1&0&0\\1&1&0&1&0\\3&0&1&1&1\\0&2&2&3&3\\2&1&0&0&1\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&0&1&2&1\\3&2&1&0&0\\1&1&0&3&3\\4&1&0&1&4\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&2&3&4\\2&1&0&1&2\\3&2&1&0&4\\4&3&2&1&0\end{pmatrix}$

Ejercicio 13: Hallar la inversa de cada una de las siguientes matrices, si existe :

a) $A=\begin{pmatrix}1&-2&1&2\\3&-1&3&1\\1&2&-4&1\\1&1&-2&4\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&0&1\\1&-1&-1&1\\2&-1&-1&2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}2&-3&2&-5\\1&-2&0&-2\\1&-3&4&-1\\5&-7&2&-9\end{pmatrix}$

Ejercicio 14: Demuestre que si $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ y $C(x_3,y_3)$ son los vértices de un triángulo, entonces su área es igual a $\text{Area}=\frac{1}{2}\left|\ \det\begin{pmatrix}1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\\1&x_3&y_3\end{pmatrix}\right|$.

Ejercicio 15: Obtener el determinante de las siguientes matrices (Simplifique) :

a) $A=\begin{pmatrix}n&n+2&n+4\\n+1&n+3&n+5\\n+6&n+8&n+10\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}x+y&z&z\\x&y+z&x\\y&y&x+z\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}b+c&c+a&a+b\\a-b&b-c&c-a\\a&b&c\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}u+3&-1&1\\5&u-3&1\\6&-6&u+4\end{pmatrix}$

e) $E=\begin{pmatrix}\text{Cos}(A)&-\text{Sen}(A)&1\\\text{Sen}(A)&\text{Cos}(A)&0\\\text{Sen}(A)&\text{Cos}(A)&\text{Cos}(A)\end{pmatrix}$ f) $F=\begin{pmatrix}\text{Sen}^2(A)&1&\text{Cos}^2(A)\\\text{Sen}^2(B)&1&\text{Cos}^2(B)\\\text{Sen}^2(C)&1&\text{Cos}^2(C)\end{pmatrix}$

g) $G=\begin{pmatrix}1+x_1y_1&1+x_1y_2&1+x_1y_3\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&1+x_2y_3\\1+x_3y_1&1+x_3y_2&1+x_3y_3\end{pmatrix}$ h) $H=\begin{pmatrix}x-1&1&1&1\\1&x-1&1&1\\1&1&x-1&1\\1&1&1&x-1\end{pmatrix}$

Ejercicio 16:

Demuestre que $\text{Det}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \text{Det}\begin{pmatrix} a_1+\alpha b_1 & a_2+\alpha b_2 & a_3+\alpha b_3 \\ b_1+\beta c_1 & b_2+\beta c_2 & b_3+\beta c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 17: Use propiedades de los determinantes en los siguientes ejercicios :

a) Hallar $\text{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12}-a_{13} & 3a_{13} \\ a_{21} & 3a_{22}-a_{23} & 3a_{23} \\ 2a_{31} & 8a_{32}-2a_{33} & 6a_{33} \end{pmatrix}$, si $\text{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 3a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 4a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 12$.

b) Hallar $\text{Det}\begin{pmatrix} 2x_{11}+6x_{12} & 8x_{13}-6x_{11} & 9x_{12} \\ x_{21}+4x_{22} & 4x_{23}-3x_{21} & 6x_{22} \\ x_{31}+6x_{32} & 4x_{33}-3x_{31} & 9x_{32} \end{pmatrix}$, si $\text{Det}\begin{pmatrix} 2x_{11} & 3x_{12} & 2x_{13} \\ x_{21} & 2x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & 3x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = 18$.

c) Hallar $\text{Det}\begin{pmatrix} 2y_2+3z_2 & z_2-6x_2 & 3x_2-y_2 \\ 4y_1+3z_1 & z_1-2x_1 & x_1-2y_1 \\ -2y_3+6z_3 & 2z_3-4x_3 & 2x_3+y_3 \end{pmatrix}$, si $\text{Det}\begin{pmatrix} x_1 & 2y_1 & z_1 \\ 3x_2 & y_2 & z_2 \\ 2x_3 & -y_3 & 2z_3 \end{pmatrix} = k$.

Ejercicio 18: Sin evaluar directamente el determinante, demostrar que det(A) = 0.

$$A = \begin{pmatrix} \text{Sen}(A) & \text{Cos}(A) & \text{Sen}(A+D) \\ \text{Sen}(B) & \text{Cos}(B) & \text{Sen}(B+D) \\ \text{Sen}(C) & \text{Cos}(C) & \text{Sen}(C+D) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19:

Demuestre que si $x + y + z = 0$, entonces $\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & \text{Cos}(z) & \text{Cos8Y9} \\ \text{Cos}(z) & 1 & \text{Cos}(x) \\ \text{Cos}(y) & \text{Cos}(x) & 1 \end{pmatrix} = 0$

Ejercicio 20:

Sean A, B y C matrices cuadradas de tamaño nxn, tales que Det(A) = 4, $\text{Det}(B^{-1})=2$ y $\text{Det}(C^T) = -6$. Calcular:

a) $\text{Det}(A^{-1}B^T)$ b) $\text{Det}((A^{-1})(B^T)(C^{-1}))$ c) $\text{Det}((3A^{-1})(2C^{-1}))$

d) $\text{Det}(A^{-1}B^TC^{-1})$ e) $\text{Det}((2A)^{-1}(3B^T)^{-1})$ f) $\text{Det}((3A^{-1})(2C^{-1}))$

g) $\text{Det}((3A^{-1})(2C)^{-1}(2B))$ h) $\text{Det}((2B)^{-1}(3A)^{-1}(2C)^T)$ i) $\text{Det}((2B^{-1})(3C^{-1})\,(3C)^T)$

Ejercicio 21:

Sea A una matriz cuadrada inversible. Demuestre que:

a) Si $A = A^{-1}$, entonces Det(A) = ±1.

b) Si $A^T = A^{-1}$, entonces Det(A) = ±1.

Ejercicio 22: (Opcional)

Considere las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, . . . , $f_n(x)$; y sean $f_1^k(x)$, $f_2^k(x)$, . . . , $f_n^k(x)$ sus k-ésimas derivadas para k=1, 2, 3, …, n-1. Se llama determinante Wronskiano al siguiente determinante:

$$W(f_1,f_2,\dots,f_n)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Hallar el determinante Wronskiano a los siguientes conjuntos de funciones :

(a) { Senx, Cosx } (b) { $1, x, x^2, x^4$ } (c) { e^x, e^{2x}, e^{3x} }

(d) { e^x, xe^x, x^2e^x } (e) { $1 + x, x + x^2, 1 + x^2$ } (f) { xSenx, e^xSenx }

Ejercicio 23: (Opcional)

Use la regla de Kramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x +4y -3z = 10 \\ 3x +6y +7z = 8 \\ 5x -2y +8z = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x +y -5z = 8 \\ 5x -6y +z = 9 \\ 8x -5y +z = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x +2y +3z = 14 \\ y +2z +3u = 20 \\ z +2u +3x = 14 \\ u +2x +3y = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x +3y +4z = 10 \\ 3x +4y +5u = 12 \\ 4x +5z +6u = 14 \\ 5y +6z +7u = 16 \end{cases}$

Ejercicio 24: (Opcional)

Determinar el valor que debe tomar "m" para que la solución de la incógnita x del siguiente sistema de ecuaciones sea igual a 2:

a) $\begin{cases} x+2y+(3m-1)z=5 \\ 2y+3z-4u=10 \\ 3x+3y-4mu=-8 \\ 2y-3z+2u=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+(2m-1)z=10 \\ 2x+3z-2u=8 \\ 3y-2z+(3-m)u=-4 \\ 2x+2y+4u=0 \end{cases}$

Ejercicio 25: **(Opcional)**

Determinar los valores de "a", para los cuales los siguientes sistemas tendrán solución única, y para los cuales x = 3.

a) $\begin{cases} 3x+2y-(a+2)z=10 \\ 2x+3y+(a-1)z=-4 \\ x+y+12z=12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-(2a-1)y+3z=4 \\ 3x-10y+(a-1)z=6 \\ 2x+3y+10z=0 \end{cases}$