# ALGEBRA LINEAL
## GUIA No 2

# SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

**ECUACIÓN LINEAL**: La forma general de una ecuación lineal es $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$.

**SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES**: Un sistema de ecuaciones lineales está formado por un conjunto de ecuaciones lineales $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$, donde i = 1, 2, ...,m. La forma general de escribir un sistema de ecuaciones lineales es la siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + \; \ldots \; + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + \; \ldots \; + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + \; \ldots \; + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\ldots & & & & & \ldots & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + \; \ldots \; + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

En forma abreviada es **Ax = b**, donde **A** es la matriz de coeficientes, **x** es el vector de las incógnitas y **b** es el vector de los valores independientes.

Un sistema de ecuaciones es **homogéneo** si $b_j = 0$, para cada j = 1, 2, . . . m; y es **No homogéneo** si al menos uno de los $b_j$ es diferente de cero.

**TIPOS DE SOLUCIÓN**: Un sistema puede ser consistente o inconsistente. Es **consistente** cuando tiene solución (única o infinitas). Es i**nconsistente** cuando no tiene solución.

Un sistema de ecuaciones homogéneo siempre tendrá solución: <u>Única</u>, cuando después de aplicar eliminación Gaussiana el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, esta es la solución trivial ( 0, 0, 0, . . . , 0 ); <u>Infinitas</u>, cuando después de aplicar eliminación Gaussiana el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas. Un sistema de ecuaciones no homogéneo puede ser consistente o inconsistente.

**REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS**: Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas representa un conjunto de dos rectas en el plano. Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas representa un conjunto de tres planos en el espacio.

**RELACIÓN SOLUCIÓN - DETERMINANTE - INVERSA**: Un sistema de ecuaciones lineales Ax = b tendrá solución única si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$. El sistema tendrá infinitas soluciones o es inconsistente si, y sólo si, $\det(A) = 0$.
Si $\det(A) \neq 0$ y $A^{-1}$ es la inversa de A, entonces la solución del sistema Ax = b es $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b}$.

**OPERACIONES ELEMENTALES ENTRE FILAS:** Si en un sistema de ecuaciones Ax=b se realizan las siguientes operaciones, se obtiene un sistema equivalente, es decir, un sistema con las mismas soluciones:

1. Multiplicar una ecuación por un escalar k diferente de cero. $\{kE_m \rightarrow \text{modifica}(E_m)\}$.
2. Intercambiar dos ecuaciones. $\{E_m \rightarrow E_n$ y $E_n \rightarrow E_m\}$.
3. Sumar a una ecuación, k veces otra ecuación. $\{kE_m + E_n \rightarrow \text{modifica}(E_n)\}$.

# EJERCICIOS

**Ejercicio 1:**
Represente geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(a) $\begin{aligned} 2x - y &= 6 \\ 4x - 2y &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} -x + 2y &= 4 \\ 2x - 4y &= -8 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 4x + 3y &= 12 \\ 3x - 4y &= 12 \end{aligned}$

**Ejercicio 2:**
Represente geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

(a) $\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 6 \\ 2x - 2y - 3z &= 6 \\ 4x + 3y + z &= 12 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x - y + 4z &= 8 \\ 3x + 2y - 3z &= 6 \\ 2x + y + 5z &= 10 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= -6 \\ 2x + y + 3z &= 6 \\ x + 4y + 5z &= 4 \end{aligned}$

**Ejercicio 3:**
Use los métodos de eliminación, sustitución e igualación para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

(a) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 6 \\ 4x - 2y &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} -x + 2y &= 4 \\ 2x - 4y &= -8 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 4x + 3y &= 12 \\ 3x - 2y &= 12 \end{aligned}$

**Ejercicio 4:**
Use los métodos de eliminación, sustitución e igualación para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

(a) $\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 6 \\ 2x - 2y - 3z &= -6 \\ 4x + 3y + z &= 12 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x - y + 4z &= 8 \\ 3x + 2y - 3z &= 12 \\ 5x + y + 5z &= 10 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= -6 \\ 2x + y + 3z &= 6 \\ 2x + 4y + 5z &= 0 \end{aligned}$

**Ejercicio 5:**
Determine si los siguientes sistemas tienen o no solución única :

(a) $\begin{aligned} 4x + 3y + 3z &= 0 \\ 2x - 2y - 3z &= 0 \\ 4x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 10 \\ 3x + 3z &= 6 \\ 3y + 5z &= 10 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} -3x + 3y + 2z &= 6 \\ 2x + y + 3z &= 10 \\ x - 4y - 5z &= 0 \end{aligned}$

**Ejercicio 6:**
Explique geométrica y analíticamente, cuando el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$, tendrá:

(a) Solución única.
(b) Infinitas soluciones.
(c) Ninguna solución.

**Ejercicio 7:**
¿Qué condiciones deben cumplir las constantes $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$ y $a_{22}$, para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$, tenga:

(a) Solución única.
(b) Infinitas soluciones.

**Ejercicio 8:**
Use el método de Gauss-Jordan para resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 2x + z - 2u = 12 \\ 2y + z - 3u = -8 \\ 3x + 3y + u = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5y - u = 12 \\ 2y - z + 2u = 10 \\ x + 3y + 4z = -10 \\ 2x - z + 3u = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x - z - u + v = 2 \\ y + z + u + w = 0 \\ y - u - v - w = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - y + 2u = 6 \\ 3x - z - 3u = 2 \\ 5y + 6z - 2u = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 2y + z + u = 0 \\ 2x - y + z - u = 2 \\ 3x + y - z + u = 4 \\ 4x + 3y + 2u = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 4x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$

**Ejercicio 9:**
Determinar en los siguientes sistemas con las incógnitas x, y, z, el valor de **m** para que tenga :
(I) Solución única (II) Infinitas soluciones (III) Ninguna solución

(a) $\begin{matrix} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{matrix}$ (b) $\begin{matrix} x + y + mz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = m \\ 2x + 3y - z = 1 \end{matrix}$ (c) $\begin{matrix} x - 3z = -3 \\ 2x + my - z = -2 \\ x + 2y + mz = 1 \end{matrix}$

**Ejercicio 10:**
En los siguientes sistemas con incógnitas x, y, z, determinar los valores de m y n para que tenga:
(I) Solución única (II) Infinitas soluciones (III) Ninguna solución

(a) $\begin{matrix} x + y + z = 4 \\ x - y - mz = 6 \\ -2x + 2y + 6z = n+1 \end{matrix}$ (b) $\begin{matrix} 2x + 4y + 2mz = 8 \\ x + 2y - 3z = 3n-1 \\ x + 5y - 3z = 2n \end{matrix}$

(a) $\begin{matrix} x + 2y + 2z = 4n - 1 \\ x - y - (m-1)z = 6 \\ -2x + 2y + 6mz = n+1 \end{matrix}$ (b) $\begin{matrix} 2x + 4y + (2m+1)z = 8n-1 \\ x + 2y - 3mz = 3n-1 \\ x + 5y - (3m-2)z = 2n-3 \end{matrix}$

**Ejercicio 11:**
Determine una expresión que relacione a, b y c, de tal modo que los sistemas de ecuaciones lineales sean consistentes:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 3y + 3z = b \\ 5x + 9y - 6z = c \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ 3x - y + 5z = b \\ x - 3y + 2z = c \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 2a \\ x - y + z = 3b \\ x + y - z = 4c \end{cases}$

**Ejercicio 12:**
Use el método de Gauss-Jordan para resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} (1/x) + (1/y) = 7 \\ (1/x) - (1/z) = 2 \\ (1/y) + (1/z) = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 2 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5\log(x) - 3\log(y) = 9 \\ 2\log(x) + 5\log(y) = 15 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 42 \\ 5 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^y = 76 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4\text{Sen}x + 3\text{Cos}y = -7 \\ 2\text{Sen}x - 5\text{Cos}y = 3 \end{cases}$

**Ejercicio 13:**
Dado un sistema Ax=b, la fórmula $x=A^{-1}b$ es la única solución del sistema si $\text{Det}(A)\neq 0$. Use ésta fórmula para resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+3y+2z=6 \\ 2x-2y-3z=-6 \\ 4x+3y+z=12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+4z=8 \\ 3x+2y-3z=12 \\ 5x+y+5z=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y+2z=-6 \\ 2x+y+3z=6 \\ 2x+4y+5z=0 \end{cases}$

**Ejercicio 14:**
Dado un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $A_{nn}X_{n1}=B_{n1}$, con $\text{Det}(A_{nn})\neq 0$, el sistema tendrá como solución única $x_k = \text{Det}(A_k)/\text{Det}(A)$, (k=1,2,…,n.), donde $A_k$ es la matriz que se obtiene a partir de A, reemplazando su k-ésima columna por la columna $B_{n1}$. Este método se conoce como **Regla de Cramer**.
Use éste método para encontrar las funciones X(p) y Y(p) que satifacen los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2pX(p)+(p-1)Y(p)=2+\left(1/p^2\right) \\ pX(p)+pY(p)=1+\left(2/p^3\right) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \left(p^2+10\right)X(p)-4Y(p)=1 \\ -4X(p)+\left(p^2+4\right)Y(p)=-1 \end{cases}$

**Ejercicio 15:**
Demuestre que los valores de $\lambda$ para los que el sistema homogéneo $\begin{cases} (a-\lambda)x+by=0 \\ cx+(d-\lambda)y=0 \end{cases}$ tiene una solución no trivial, satisfacen la ecuación $(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$.

**Ejercicio 16:**
Un zoológico tiene aves (bípedos) y bestias (cuadrúpedos). Si en el zoológico se cuentan 60 cabezas y 200 patas, ¿Cuántas aves y cuántas bestias viven allí?

**Ejercicio 17:**
Una heladería vende sólo helados con soda y leches malteadas. En el primero se usan 1 onza de jarabe y 4 onzas de helado. En la segunda, se utilizan 1 onza de jarabe y 3 onzas de helado. Si el expendio usa 4 galones de helado y 5 cuartos de jarabe en un día, ¿Cuántos helados con soda y malteadas vende diariamente?
INFORMACIÓN : ( 1 cuarto = 32 onzas; 1 galón = 128 onzas ).

**Ejercicio 18:**
Una fabrica de porcelana manufactura tazas y platos de cerámica. Por cada taza o plato, un trabajador mide una cantidad fija de material y la coloca en una máquina moldeadora, de la cual sale automáticamente vidriada o cocida. En promedio, un trabajador necesita 3 minutos para el proceso de una taza y 2 minutos para el proceso de un plato. El material para la taza cuesta $ 25 y para el plato cuesta $ 20. Si se asignan diariamente $ 4400 para producción de tazas y platos, ¿Cuántas unidades de cada uno de estos productos se pueden manufacturar en una jornada de 8 horas, si el trabajador labora cada minuto del día y exactamente se gastan los $ 4400 en los materiales?

**Ejercicio 19:**
Un contratista dispone de 5000 horas-hombre de mano de obra para tres proyectos. Los costos por hora-hombre de los tres proyectos son de US$ 8.0, US$ 10.0 y US$ 12.0, respectivamente, y el costo total es de US$ 53.000. Si el número de horas-hombre para el tercer proyecto es igual a la suma de las horas-hombre requeridas por los primeros dos proyectos, calcule el número de horas-hombre de que puede disponerse en cada proyecto.

**Ejercicio 20:**
Un departamento de caza y pesca estatal suministra tres tipos de alimento a un lago que mantiene tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana, un promedio de una unidad del alimento 1, una unidad del alimento 2 y dos unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de tres unidades del alimento 1, cuatro unidades del alimento 2 y cinco unidades del alimento 3. Para un pez de la especie 3, el consumo semanal promedio es dos unidades del alimento 1, una unidad del alimento 2 y cinco unidades del alimento 3. Cada semana se proporciona al lago 25.000 unidades del alimento 1, 20.000 unidades del alimento 2 y 55.000 unidades del alimento 3. Si se supone que todo el alimento es ingerido, ¿Cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

**Ejercicio 21:**
Un viajero recién regresado de Europa gastó en alojamiento, por día, US$ 30 diarios en Inglaterra, US$ 20 en Francia y US$ 20 en España. En comidas, por día, gastó US$ 20 en Inglaterra, US$ 30 en Francia y US$ 20 en España. Adicionalmente, desembolsó US$ 10 diarios en cada país en gastos varios. El registro de nuestro viajero indica que gastó un total de US$ 340 en alojamiento, US$ 320 en alimentación y US$ 140 en gastos varios en su recorrido por estos tres países. Calcule el número de días que permaneció el viajero en cada país.

**Ejercicio 22:**
Daniela tiene $ 640 de $ 1, $ 5 y $ 10 respectivamente. En total tiene 95 billetes. El doble de la cantidad de billetes de $1 y $5 es 10 más que el doble de la cantidad de billetes de $10. ¿Cuántos billetes de cada denominación tiene?

**Ejercicio 23:**
Para llenar un tanque de almacenamiento de agua de 1000 pies cúbicos se pueden utilizar tres tuberías de entrada A, B y C. Cuando las tres operan a su capacidad total, el tanque se puede llenar en 10 horas. Cuando solo se utilizan A y B, el tiempo se incrementa en 20 horas. Las tuberías A y C pueden llenar el tanque en 12.5 horas.

(a) ¿Cuál es la intensidad de flujo en pies cúbicos por hora de cada una de las tuberías?
(b) ¿Cuánto tiempo gastará cada una de las tuberías individualmente para llenar el tanque?
(c) ¿En cuánto tiempo llenan el tanque las tuberías B y C?

**Ejercicio 24:**
Un nutriólogo quiere combinar tres alimentos para que la mezcla resultante tenga 900 unidades de vitaminas, 750 unidades de minerales y 350 unidades de grasa. Las unidades de vitaminas, minerales y grasa que contienen cada uno de los tres alimentos aparecen en la siguiente tabla. ¿Cuántos gramos de cada alimento se deben tomar para obtener la mezcla requerida?

| | **Vitaminas** | **Minerales** | **Grasa** |
|---|---|---|---|
| 1 gr del alimento A | 35 unidades | 15 unidades | 10 unidades |
| 1 gr del alimento B | 10 unidades | 20 unidades | 10 unidades |
| 1 gr del alimento C | 20 unidades | 15 unidades | 5 unidades |

**Ejercicio 25:**
El tesorero de un Fondo invirtió $ 5000 de los ahorros en tres cuentas distintas, a intereses anuales de 8%, 9% y 10%. El interés total ganado en un año fue de $ 460. La cantidad ganada por el depósito a 10% fue $ 20 más que la que se ganó al 9%. ¿Cuánto se invirtió con cada tasa de interés?

**Ejercicio 26:**
Una empresa produce tres artículos A, B y C, los que procesa en tres máquinas. El tiempo (en horas) requerido para procesar una unidad de cada producto por las tres máquinas está dado enseguida:

| | **PRODUCTO A** | **PRODUCTO B** | **PRODUCTO C** |
|---|---|---|---|
| **MAQUINA I** | 3 | 1 | 2 |
| **MÁQUINA II** | 1 | 2 | 4 |
| **MÁQUINA III** | 2 | 1 | 1 |

Se dispone de la máquina I por 850 horas, de la máquina II por 1200 horas y de la máquina III por 550 horas. ¿Cuántas unidades de cada producto deberían producirse con objeto de emplear todo el tiempo disponible de las máquinas?

**Ejercicio 27:**
Una compañía de carga transportó tres tipos de fletes en su transporte aéreo ligero. El espacio requerido por cada unidad de los tres tipos de carga eran de 5, 2 y 4 pies cúbicos, respectivamente. Cada unidad de los tres tipos de carga pesó 2, 3 y 1 kilogramo, respectivamente, mientras que los valores unitarios de los tres tipos de carga fueron $10, $40 y $60, respectivamente. Determine el número de unidades de cada tipo de carga transportada si el valor total de la carga fue de $13.500, ocupó 1050 pies cúbicos de espacio y pesó 550 kilogramos.

**Ejercicio 28:**
Para cada uno de los siguientes casos, encuentre funciones polinómicas de grado n cuyas gráficas pasen por los puntos dados:

| **Grado** | **Puntos** |
|---|---|
| 2 | (1,3), (3,1), (5,7). |
| 3 | (-4,1), (-2,3), (1,1), (4,-1). |
| 4 | (-7,7), (-5,4), (-2,6), (3,4), (6,7). |
| 5 | (-7,-2), (-1,-5), (1,2), (3,-3), (4,-4), (5,0). |

**Ejercicio 29:**
Dos productos A y B compiten en el mercado. Las demandas $X_A$ y $X_B$ de estos productos están relacionadas a sus precios $P_A$ y $P_B$ por las ecuaciones de demanda $X_A = 17 - 2P_A + \frac{1}{4}P_B$ y $X_B = 20 - 3P_B + \frac{1}{2}P_A$. Las ecuaciones de la oferta son $P_A = 2 + X_A + \frac{1}{2}X_B$ y $P_B = 2 + \frac{1}{4}X_B + \frac{1}{2}X_A$ que dan los precios a los cuales las cantidades $X_A$ y $X_B$ estarán disponibles en el mercado. En el punto de equilibrio del mercado, las cuatro ecuaciones deben satisfacerse (dado que la demanda y la oferta deben ser iguales). Calcule los valores de equilibrio de $X_A$, $X_B$, $P_A$ y $P_B$. (si los hay)

**Ejercicio 30:**
Una pequeña compañía constructora ofrece tres tipos de casas. El primer tipo de casa requiere 3 unidades de concreto, 2 unidades de madera para cancelería y 5 unidades de madera para estructuras. El segundo y tercer tipo de casa requieren 2, 3, 5 y 4, 2, 6 unidades, respectivamente, de concreto, madera para cancelería y madera para estructuras. Si cada mes la compañía dispone de 150 unidades de concreto, 100 unidades de madera para cancelería y 250 unidades de madera para estructuras, calcular el número de casas de cada tipo que la compañía puede construir en un mes si usa todos los recursos de que dispone.