ALGEBRA LINEAL
GUIA No 1

MATRICES

1. CONCEPTOS BÁSICOS

DEFINICIÓN: Un arreglo es un conjunto de datos organizados unidimensionalmente, bidimensionalmente o tridimensionalmente. En este curso trabajaremos arreglos unidimensionales (**vectores**) y los arreglos bidimensionales (**matrices**).

DEFINICIÓN: Una **matriz** es un arreglo rectangular, donde se organiza un conjunto de números por filas y por columnas. Usualmente se usa la notación $A_{mn} = (a_{ij})$, donde $i = 1, 2, 3, . . . ,m$ y $j = 1, 2, 3, . . . , n$. El indice i indica la fila y el indice j indica la columna en que está ubicado el elemento a_{ij}. Los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... a_{kk} forman la **diagonal principal** de la matriz. Si en un arreglo matricial el número de filas es igual al número de columna entonces lo llamamos **matriz cuadrada**. Veamos la notación general para una matriz de 5x5 :

$$A_{55} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

MATRIZ FILA: Una matriz que tiene una fila y n columnas se llama **matriz fila** y se escribe $A_{1n} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, . . . , a_{1n})$. También se llama **vector fila**.

MATRIZ COLUMNA: Una matriz que tiene m filas y una columna se llama **matriz columna** y se escribe $A_{m1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$. También se llama **vector columna**.

MATRIZ CUADRADA: Una matriz es cuadrada si el número de filas es igual al número de columnas. Se simboliza A_{nn}.

MATRIZ NULA: Una matriz es nula si todos sus elementos son iguales a 0.

MATRIZ IDÉNTICA: Es una matriz cuadrada en donde todos los elementos de la diagonal son iguales a 1, y los demás elementos son iguales a 0. Usualmente se nota I_{nn} a la matriz idéntica de tamaño nxn.

MATRIZ ESCALAR: Es una matriz cuadrada en donde todos los elementos de la diagonal tienen el mismo valor, y los demás elementos son iguales a cero.

MATRIZ DIAGONAL: Es una matriz cuadrada en donde al menos un elemento de la diagonal es diferente de cero, y los demás elementos son iguales a cero.

MATRIZ TRANSPUESTA: La transpuesta de la matriz A_{mn} es una matriz B_{nm} que obtiene cambiando las filas por las columnas, es decir, la fila i pasa a ser columna i y la columna j pasa a ser fila j. Es decir, el elemento a_{ij} de la matriz A_{mn} será el elemento a_{ji} de la matriz $Tr(A_{mn}) = B_{nm}$. Se denota $Tr(A_{mn}) = A^T$.

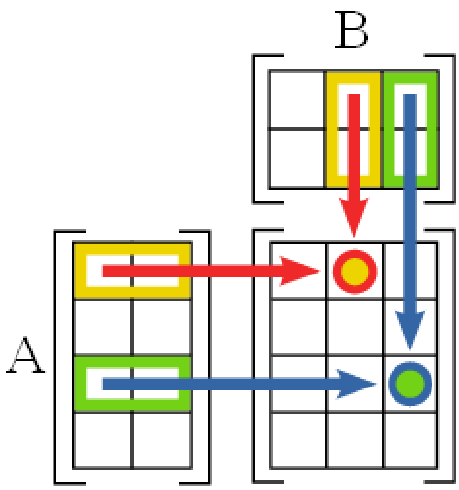
MATRIZ SIMÉTRICA: Una matriz cuadrada A_{nn} es simétrica si es igual su transpuesta, es decir, si el elemento a_{ij} es igual al elemento a_{ji}. $A_{nn} = Tr(A_{nn})$. La matriz A es antisimétrica si $A = -Tr(A)$.

2. OPERACIONES CON MATRICES

Entre las operaciones posibles con matrices tenemos la suma, resta, producto, determinante, inversa, ortogonalización, diagonalización, etc.

SUMA DE MATRICES: La matriz suma de las matrices $A_{mn} = (a_{ij})$ y $B_{mn} = (b_{ij})$ es una matriz $C_{mn} = (c_{ij})$, en donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

PRODUCTO DE MATRICES: La matriz producto de las matrices $A_{mq} = (a_{ip})$ y $B_{qn} = (b_{pj})$ es una matriz $C_{mn} = (c_{ij})$, donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}b_{kj}$.



PRODUCTO POR ESCALAR: Si $A_{mn} = (a_{ij})$ y $k \in R$ $(k \neq 0)$, entonces el producto por un escalar se define como $kA_{mn} = (ka_{ij})$.

3. TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

Algunos tipos especiales de matrices, que dependen de las operaciones anteriores son las siguientes:

MATRIZ ORTOGONAL: Una matriz A_{nn} es ortogonal si $A^{-1} = A^T$, es decir, si $AA^T = I$.

MATRIZ NULIPOTENTE: Una matriz A_{nn} es nulipotente si $A^K = 0$, para algún entero $k \geq 1$.

MATRIZ IDEMPOTENTE: Una matriz A_{nn} es idempotente si $A^2 = A$.

MATRIZ INVOLUTIVA: Una matriz A_{nn} es involutiva si $A^2 = I$.

MATRIZ TRANSJUGADA: Si A_{mn} es una matriz de elementos complejos, entonces la matriz transjugada de A, denotada A*, es la transpuesta de la conjugada de A.

MATRIZ UNITARIA: Una matriz A_{nn} invertible y con elementos complejos es unitaria si $A^{-1} = A^*$.

MATRIZ HERMÍTICA: Una matriz A_{nn} es hermítica si $A = A^*$. Una matriz A es antihermítica si $A = -A^*$.

EJERCICIOS

Ejercicio 1: Una empresa de investigación estadística cuenta con 10 profesionales en diferentes áreas (Sociología, psicología, medicina, ingeniería, educación, estadística, etc) dedicados a modelar y graficar diversos problemas.

a) Elabore un arreglo que contenga los códigos de los 10 empleados.
b) Elabore un arreglo que contenga códigos, edades y sueldos de los 10 empleados.
c) Elabore un arreglo que contenga código, edad, sexo, estado civil, antigüedad, religión, fecha de nacimiento, domicilio, profesión y sueldo.
d) ¿Cuál es el tamaño de cada uno de los arreglos anteriores.

Ejercicio 2: Una cadena de restaurantes realiza sus compras para la semana en el supermercado más cercado a cada restaurante, los productos (arroz, plátano, pollo y pezcado) son comprados por kilo en cantidades diferentes de acuerdo a la ubicación del restaurante. En Olímpica se compran 15 kl, 10 kl, 14 kl y 8 kl, respectivamente de cada producto; en Carulla se compran 15 kl, 8 kl, 16 kl y 20 kl, respectivamente de cada producto; en Cafam se compran 20 kl, 16 kl, 18 kl y 18 kl, respectivamente de cada producto; en Colsubsidio se compran 8 kl, 6 kl, 15 kl y 22 kl, respectivamente de cada producto; y el Febor se compran 6 kl, 20 kl, 17 kl y 18 kl, respectivamente de cada producto. Elabore un arreglo que contenga toda esta información.

Ejercicio 3 : Un viajero recién regresado de Europa gastó en alojamiento, por día, US$ 30 diarios en Inglaterra, US$ 20 en Francia y US$ 20 en España, En comidas, por día, gastó US$ 20 en Inglaterra, US$ 3º en Francia y US$ 20 en España. Adicionalmente desembolsó US$ 10 diarios en cada país en gastos varios. El registro de nuestro viajero indica que gastó un total de US$ 340 en alojamiento, US$ 320 en alimentación y US$ 140 en gastos varios en su recorrido por estos tres países. Elabore un arreglo que contenga la información anterior.

Ejercicio 4 : Una fábrica de porcelana manufactura tazas y platos de cerámica. Por cada taza o plato un trabajador mide una cantidad fija de material y la coloca en una máquina moldeadora, de la cual sale automáticamente vidriada o cocida. En promedio, un trabajador necesita 3 minutos para iniciar el proceso en el caso de una taza, y 2 minutos para un plato. El material para la taza cuesta $ 25 y para el plato $ 20. Si se asignan diariamente $ 4400 para producción de tazas y platos y cada trabajador labora cada minuto de una jornada de 8 horas, ¿Cómo quedaría un arreglo matricial que contenga toda la información anterior?

Ejercicio 5 : Encuentre la transpuesta de las siguientes matrices :

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 & 2 \\ -2 & 2 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & -5 & 6 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6 : Llene cada cuadro de tal manera que la matriz dada sea simétrica :

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & \square \\ 5 & 3 & \square & 5 \\ \square & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & \square & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & \square & 0 & 2 \\ 3 & 0 & \square & 1 \\ \square & 8 & 5 & 3 \\ 2 & \square & 3 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \square & 8 \\ \square & 2 & 8 & \square \\ 6 & \square & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7 : Considere los siguientes arreglos matriciales :

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 8 \\ -4 & 5 & 7 \\ -7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & 9 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Hallar $(A+B)^T$ (b) Hallar $(AB)^T$ (c) Hallar $B^T C^T$

Ejercicio 8 : Considere los siguientes arreglos matriciales :

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 7 \\ 9 & 8 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 8 & 8 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

g) $R = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ h) $S = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ i) $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Realizar los siguientes productos (cuando sean posibles)

(a) A B (b) C D (c) A C (d) D A
(e) D E (f) E D (g) D F (h) F D
(i) R S (j) R (S T) (k) (R S) T (l) P I_{44}

Ejercicio 9 :
Realizar las siguientes operaciones para las matrices dadas en el ejercicio 8 :

(a) 2A + 5B (b) 4C - 7D (c) 2R + 3S + 4T

(d) $4H - I_{44}$ (e) $5H - 2I_{44}$ (f) $(A - I_{44})(A + I_{44})$

Ejercicio 10: Determinar los valores de a, b y c, para que se cumplan las siguientes igualdades:

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -a \\ c & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & -2 \\ c & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -13 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 11: Hallar la matriz A^2, B^2, C^2 y D^2, en los siguientes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 12:
Verificar si las siguientes matrices son ortogonales:

a) $A = \begin{pmatrix} \text{Cos}\theta & \text{Sen}\theta \\ -\text{Sen}\theta & \text{Cos}\theta \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} \text{Sen}\theta & \text{Cos}\theta & 0 \\ \text{Cos}\theta & -\text{Sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 13:
Encuentre una familia de matrices ortogonales de tamaño 2x2, es decir, matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tales que $AA^T = I$.

Ejercicio 14:
Encuentre una familia de matrices nulipotentes de tamaño 2x2, es decir, matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tales que $A^k = 0$, para algún entero $k \geq 1$.

Ejercicio 15:
Encuentre una familia de matrices idempotentes de tamaño 2x2, es decir, matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tales que $A^2 = A$.

Ejercicio 16:
Encuentre una familia de matrices involutivas de tamaño 2x2, es decir, matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tales que $A^2 = I$.

Ejercicio 17:
Encuentre las relaciones entre los números a, b, c, d, p, q, m y n, para que el producto de las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} p & q \\ m & n \end{pmatrix}$ sea conmutativo, es decir, AB = BA.

Ejercicio 18:
Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, determine todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tales que AB = BA.

Ejercicio 19:

Sea $A = \begin{pmatrix} \text{Cos}\theta & \text{Sen}\theta \\ -\text{Sen}\theta & \text{Cos}\theta \end{pmatrix}$. Hallar A^2, A^3, A^4. Simplifique cada resultado y obtenga una expresión para A^n.

Ejercicio 20:
Sean A, B y C matrices conformables y k un escalar. Verificar las siguientes propiedades:

a) k(AB) = (kA)B = A(kB).
b) A(BC) = (AB)C.
c) IA = A y AI = A.
d) A(B+C) = AB + AC.
e) (A+B)C = AC + BC

Ejercicio 21:
Sean A y B dos matrices diagonales de tamaño nxn. Verificar que:
a) AB es una matriz diagonal
b) AB = BA.

Ejercicio 22:
Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo tamaño y k un escalar. Verificar que:
a) $(A^T)^T = A$ b) $(A+B)^T = A^T + B^T$. c) $(AB)^T = (BA)^T$. d) $(kA)^T = k(A^T)$

Ejercicio 23:
Determinar si las siguientes matrices son transjugadas:

a) $A = \begin{pmatrix} 1-2i & 3+4i \\ 2i & -6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}+\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} \end{pmatrix}$

Ejercicio 24:
Determinar si las siguientes matrices son unitarias:

a) $A = \begin{pmatrix} 1-2i & 3+4i \\ 2i & -6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}+\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} \end{pmatrix}$

Ejercicio 25:
Determinar si las siguientes matrices son hermíticas:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3-2i \\ 3+2i & 6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{3-2i}{\sqrt{26}} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{-3+2i}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$

Ejercicio 26:
Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Encuentre números reales m y n tales que mA + nB = C.

Ejercicio 27:

Una matriz cuadrada es de probabilidad si: a) Cada componente es no negativa. B) La suma de los elementos de cada fila es 1.

Sean $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Verifique que P y Q son matrices de probabilidad.

b) Muestre que PQ es una matriz de probabilidad.

c) Muestre que P^2 es una matriz de probabilidad.

d) Exprese R en función de las matrices P y Q, si es posible.

Ejercicio 28:

En los valores de a, b, c y d, para que el producto de la matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sea igual a $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 29:

La empresa Carnes del Sinú le vende sus tres tipos de carnes (Cerdo (CE), Res (RE), Pollo (PO)) solo a cuatro supermercados (Alkosto (AL), Carulla (CA), Olimpica (OL), Éxito (EX)). En las siguientes tablas se presentan las cantidades (en kilos) de carnes compradas por cada uno de los supermercados a la empresa de carnes, en las cuatro semanas del mes de febrero:

S1		SUPERMERCADOS			
		AL	CA	OL	EX
CARNES	CE	110	210	180	200
	PO	130	150	200	190
	RE	150	170	190	170

S2		SUPERMERCADOS			
		AL	CA	OL	EX
CARNES	CE	220	180	200	160
	PO	240	230	180	180
	RE	250	170	190	220

S3		SUPERMERCADOS			
		AL	CA	OL	EX
CARNES	CE	180	210	200	150
	PO	190	170	160	190
	RE	230	190	180	230

S4		SUPERMERCADOS			
		AL	CA	OL	EX
CARNES	CE	110	230	180	180
	PO	130	170	250	250
	RE	220	160	190	300

a) ¿Cuántos kilos de Carnes compró Alkosto en el mes de febrero?
b) Cuántos kilos de cada tipo de carne compró Carulla en cada una de las semanas de febrero?
c) Cuántos kilos de cada tipo de carne compró Exito en cada una de las semanas de febrero?
d) ¿Cuántos kilos de Pollo vendió Carnes del Sinú en el mes de febrero?
e) ¿Cuántos kilos de cada tipo de Carne vendió Carnes del Sinú a cada uno de los supermercados en el mes de febrero?
f) Éxito y Carulla tienen un solo dueño y éste realiza a Carnes del Sinú una sola consignación semanal. Si durante el mes de febrero los precios por kilo de Cerdo, Pollo y Res, fueron respectivamente \$2500, \$4500 y \$3500, ¿Cuánto se consignó en cada semana de febrero?

Ejercicio 30:

Acerías Bersal requiere grandes cantidades de hierro y carbón para producir acero. Durante los siguientes tres meses se comprará a tres proveedores (Hierros Caribe, FerroCol, Iron Ltda). Las siguientes presentan las cantidades de toneladas de hierro y carbón que se comprarán y los costos en dólares por tonelada de cada proveedor.

DEMANDA TONELADAS		MATERIA PRIMA	
		HIERRO	CARBÓN
MESES	M1	9	8
	M2	5	7
	M3	6	4

COSTOS POR TONELADA		PROVEEDORES		
		H.CARIBE	FERROCOL	IRON LTADA
MATERIA PRIMA	HIERRO	450	550	650
	CARBÓN	700	650	600

¿Cuál es el proveedor que ofrece mayor beneficio o más rentable?